Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giovanni Becchere

Valutazione e copertura di opzioni Americane in mercati incompleti: strategie di rischio minimo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 21–24.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_21_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 21-24

Valutazione e copertura di opzioni Americane in mercati incompleti: strategie di rischio minimo.

Giovanni Becchere

L'applicazione del calcolo stocastico alla teoria delle opzioni è un settore particolarmente interessante e potente della matematica applicata. In particolare in questa tesi ci siamo occupati del problema della copertura e del cosiddetto «pricing» di una opzione Americana in un mercato incompleto.
Innanzitutto ricordiamo che per un'opzione Europea non replicabile un possibile approccio al problema della copertura e del «pricing» è quello cosiddetto di minimizzazione del rischio. Sostanzialmente l'idea è che in un mercato incompleto un'opzione Europea ha comunque una componente di rischio intrinseca che come tale non può essere coperta; così si è interessati a strategie che riducono il rischio totale solamente a questa componente. Questo metodo, introdotto da Föllmer e Sondermann nel caso martingala (cfr. [4]), è stato sviluppato a fondo da Föllmer e Schweizer (cfr. [6], [7] e [3]). In particolare essi hanno introdotto le nozioni di *strategia globalmente di rischio minimo e strategia localmente di rischio minimo* e ne hanno fornito opportune caratterizzazioni in termini di ortogonalità nel senso delle martingale.

Se consideriamo il problema della valutazione di un'opzione Americana, è ben noto che nel caso del mercato completo, sotto l'unica misura martingala equivalente, una tale opzione non può essere replicata mediante una strategia autofinanziata ed è allora conveniente considerare la nozione di strategia di super copertura con consumo. In questo modo è possibile ottenere un'espressione del valore dell'opzione come inviluppo di Snell del processo di payoff ad essa associato. Avendo a che fare con mercati incompleti sembra ragionevole definire ancora il valore di un'opzione Americana mediante un'espressione formalmente analoga a quella ottenuta nel caso completo. Il problema è che l'incompletezza del mercato è equivalente all'esistenza di più misure martingala equivalenti; così ognuna di queste ci da un possibile valore per l'opzione considerata. Il punto allora è fornire un criterio per selezionare una particolare misura fra quelle martingala equivalenti e quindi lavorare sotto di essa. Un metodo possibile consiste nello scegliere di porsi l'obiettivo della minimizzazione del rischio (come nel caso delle opzioni Europee).

Questo approccio era già stato seguito da Schweizer (cfr. [6], Capitolo 3), ma senza fare uso della nozione di strategia con consumo e utilizzando la classica strategia con due componenti (come nel caso delle opzioni Europee). L'obiettivo principale di questa tesi è quello di sviluppare un nuovo approccio localmente di rischio minimo per opzioni Americane, basato sulla nozione di strategia con consumo. In effetti in questo modo otteniamo dei risultati diversi da quelli ottenuti da Schweizer. Inoltre presentiamo due nuovi risultati di convergenza e stabilità che possono essere interpretati come argomenti in favore del nostro approccio di minimizzazione locale del rischio.

Sostanzialmente la differenza tra l'approccio seguito da Schweizer e quello sviluppato in questo lavoro è il seguente: Schweizer implicitamente considera come una unica componente il processo dei costi e quello dei consumi associati ad una data strategia, mentre nel nostro approccio distinguiamo i consumi dai costi ed aggiungiamo un'opportuna condizione di minimalità.

Più precisamente la tesi è strutturata come segue.

Nel Capitolo 1 richiamiamo brevemente alcune nozioni generali e alcuni ben noti risultati relativi alla teoria della valutazione e copertura di opzioni.

Nel capitolo 2 sviluppiamo il nostro approccio di minimizzazione locale del rischio per opzioni Americane nel caso dei modelli a tempi discreti. Introduciamo in modo del tutto naturale la condizione di minimalità e quindi dimostriamo che questa è strettamente collegata alla nozione matematica di inviluppo di Snell. Consideriamo una definizione generale di strategia globalmente di rischio minimo e, esibendo un controesempio, osserviamo che nel caso generale l'esistenza di una tale strategia non è assicurata. Perciò introduciamo, analogamente a quanto fa Schweizer, l'idea di strategia localmente di rischio minimo e per questa dimostriamo un risultato di esistenza anche nel caso generale, tale risultato viene ottenuto in modo costruttivo nel senso che riusciamo ad esibire un algoritmo di costruzione della strategia per induzione all'indietro. Comunque nel cosiddetto caso martingala (cioé quando il processo dei prezzi del bene sottostante all'opzione è una martingala rispetto alla misura di probabilità data) dimostriamo l'esistenza di una strategia globalmente di rischio minimo e inoltre ne diamo una costruzione esplicita mediante l'inviluppo di Snell del processo di payoff associato all'opzione considerata. Più in generale quando il processo dei prezzi è una semimartingala otteniamo due risultati relativi alla strategia localmente di rischio minimo: per prima cosa ne otteniamo una caratterizzazione in termini di ortogonalità fra il processo dei costi e la parte martingala del processo del prezzo; inoltre, sotto l'ulteriori ipotesi che esista la cosiddetta misura martingala minimale (m.m.m.) per il processo del prezzo, otteniamo una costruzione della strategia localmente di rischio minimo mediante l'inviluppo di Snell (rispetto alla m.m.m.) del processo di payoff associato all'opzione.

Nel capitolo 3 sviluppiamo il nostro approccio di minimizzazione locale del rischio per opzioni Americane nel caso dei modelli a tempi continui con processo del prezzo dato da una semimartingala. Per prima cosa abbiamo bisogno di introdurre alcune ipotesi tecniche sul processo di payoff associato all'opzione e sul processo del prezzo (queste ipotesi sono le stesse assunte da Schweizer). Inoltre introduciamo e giustifichiamo pienamente alcune condizioni sulle strategie che intendiamo considerare. Queste condizioni appaiono molto naturali dal punto di vista dell'interpretazione finanziara del modello e inoltre risultano molto utili dal punto di vista matematico. Perciò limitiamo il nostro interesse ad una nuova classe di strategie che chiamiamo «strategie fortemente ammissibili» (ovvero in questo contesto utilizziamo solamente queste strategie) e diamo una definizione naturale di strategia globalmente di rischio minimo. Tuttavia in generale abbiamo bisogno di una opportuna definizione di strategia localmente di rischio minimo, così la introduciamo e verifichiamo che in effetti si tratta di una «buona» definizione dimostrando che ha le seguenti proprietà:

1. consistenza rispetto alla teoria già esistente per le opzioni Europee;

2. consistenza rispetto alla definizione di strategia globalmente di rischio minimo per opzioni Americane data in precedenza;

3. una strategia localmente di rischio minimo esiste anche nel caso semimartingala;

4. è possibile caratterizzare la strategia localmente di rischio minimo in termini di ortogonalità fra il processo dei costi e la parte martingala del processo del prezzo.

In questo modo otteniamo risultati analoghi a quelli ottenuti nel caso dei modelli a tempi discreti. Sottolineiamo che il risultato principale di questo capitolo è quello enunciato nel precedente punto 4. Da un punto di vista tecnico i punti chiave che permettono di ottenere questi risultati generali sono una particolare caratterizzazione dell'inviluppo di Snell (implicita in [2] e che noi dimostriamo esplicitamente nell' Appendice A di questa tesi) e i risultati ottenuti da Schweizer in [7].

Nel Capitolo 4 diamo una risultato di convergenza e stabilità che può essere interpretato come un argomento in favore dell'approccio di minimizzazione locale del rischio per opzioni Americane sviluppato nei capitoli precedenti. Consideriamo un modello di diffusione con salti (introdotto da Merton in [5]) e definiamo un particolare tipo di opzione che chiamiamo n-put: si tratta di una put che può essere esercitata solo in un sottoinsieme di n punti dell'intervallo di tempo $[0, T]$ considerato dal modello e tuttavia l'emittente di tale opzione può operare sui mercati per la copertura in modo continuo in tutto $[0, T]$. Dopodichè vediamo che allora questa opzione può essere interpretata in un certo senso come un'opzione Europea a tratti, o meglio come una opportuna famiglia di opzioni Europee: coprendo queste opzioni si effettua la copertura della n-put. Questo ragionamento ci permette di selezionare la misura martingala minimale ed ottenere delle formule esplicite per il valore di questa particolare opzione e per una strategia che, per costruzione, risulta essere localmente di rischio minimo (nel senso delle opzioni Europee). Il risultato principale di questo capitolo, che può essere interpretato come un argomento in favore della scelta della misura martingala minimale anche nel caso delle opzioni Americane classiche, è un risultato di convergenza di un'opportuna decomposizione del valore di rischio minimo ottenuto per la n-put alla corrispondente decomposizione del valore di una opzione Americana put classica. I risultati contenuti in questo capitolo sono apparsi in [1].

Nel Capitolo 5 otteniamo un altro risultato di convergenza. Si tratta di un risultato di convergenza in distribuzione per l'inviluppo di Snell sotto la misura martingala minimale che può essere facilmente esteso, per esempio, al valore di una opzione Americana put. Questo può essere visto come un ulteriore argomento in favore della scelta della misura martingala minimale per le opzioni Americane in mercati incompleti. Partendo da un risultato dovuto a Mulinacci e Pratelli otteniamo il teorema di convergenza; quindi il resto del capitolo è completamente dedicato a mostrare che questo teorema può essere applicato nel caso del modello di Merton di diffusione con salti: infatti introduciamo una opportuna successione di modelli approssimanti e verifichiamo che siano soddisfatte tutte le condizione richieste per poter applicare il risultato di convergenza.

La tesi ha anche due appendici tecniche. In Appendice A ricordiamo la nozione di inviluppo di Snell e, in particolare, dimostriamo un utile risultato di caratterizzazione. In Appendice B richiamiamo brevemente il concetto di misura martingala minimale.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Becchere e S. Mulinacci, *Hedging American options in Merton's model: a locally risk-minimizing approach*, Asia Pacific Financial Markets, **A Special Issue on Mathematical Finance**, (to appear).

[2] N. El Karoui, *Les aspect probabilistes du contrôle stochastique*, SIAM J. Control Optim., **33** (1995), 29-66.

[3] H. Föllmer e M. Schweizer, *Hedging of contingent claims under incomplete information*, Applied Stochastic Analysis, **5** (1991), 389-414.

[4] H. Föllmer e D. Sondermann, *Hedging of non-redundant contingent claims*, Contributions to Mathematical Economics (1986), 205-223.

[4] R. C. Merton, *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Financial Economics, **3** (1976), 125-144.

[5] M. Schweizer, *Hedging of Options in a General Semimartingale Model*, Diss. ETHZ No. 8615 (1988).

[6] M. Schweizer, *Risk-minimality and orthogonality of martingales*, Stochastic Stochastic Rep., **30** (1990), 123-131.

Via Biancardi 6, 20149 Milano
E-mail: becchere@dm.unipi.it, becchere@gruppocredit.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Maurizio Pratelli