Olga Polverino

Blocking set nei piani proiettivi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 181–184.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_181_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 181-184

Blocking set nei piani proiettivi.

Olga Polverino

1. – Introduzione.

Un *blocking set* in un piano proiettivo finito è un insieme di punti intersecato da ogni retta; esso è detto *banale* se contiene rette ed è detto minimale se non è contenuto propriamente in alcun altro blocking set del piano. Storicamente, i blocking set nascono nella seconda metà del novecento nell'ambito della matematica applicata all'economia come «coalizione bloccante» (*blocking coalition*) di un «gioco cooperativo» (si veda M. Richardson, *On finite projective games*, in Proc. Amer. Math. Soc., **7** (1956)). Successivamente, A. A. Bruen nella sua tesi di dottorato introduce il termine blocking set e ne comincia uno studio sistematico nell'ambito della geometria combinatoria. Egli studia lo spettro delle cardinalità di un blocking set non banale in un piano proiettivo finito ottenendo il seguente risultato fondamentale:

Teorema 1 ([3]). – *Se B è un blocking set non banale in un piano proiettivo finito di ordine n, allora si ha*

$$|B| \geq n + \sqrt{n} + 1\,,$$

l'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, B è un sottopiano di ordine $\sqrt{n}$ (sottopiano di Baer).

Agli inizi degli anni '70 il matematico ungherese L. Rédei, nel suo libro *Lacunary polynomials over finite fields* (North Holland, Amsterdam 1973), affrontò lo studio di alcune classi di polinomi (a coefficienti su campi finiti) detti *polinomi lacunosi*. Nell'ultimo capitolo egli mostra come questi polinomi possono essere utilizzati per risolvere questioni di carattere algebrico e geometrico legate in vario modo alla teoria dei campi finiti. In particolare nel paragrafo 36 egli prova che i l numero di direzioni determinate dal grafico di una funzione polinomiale su un campo finito di ordine q o è maggiore di $\frac{q+1}{2}$, oppure appartiene ad un intervallo dipendente da un divisore di q. Alcuni anni dopo A. Bruen e J. Thas osservarono che questi ultimi risultati potevano essere riletti in termini di blocking set. Infatti, l'insieme ottenuto aggiungendo al grafico di una funzione su un campo finito l'insieme delle sue direzioni è un blocking set detto per questo di *tipo Rèdei*. Lo sviluppo delle tecniche polinomiali illustrate da Rédei nel suo libro, da quel momento, costituirono un nuovo ed efficace strumento per lo studio dei blocking set.

Con l'ausilio di queste tecniche si è oggi giunti alla seguente caratterizzazione dei blocking set di tipo Rédei con meno di $3(q+1)/2$ punti nel piano proiettivo coordinato sul campo di Galois GF(q):

TEOREMA 2 ([1]). – *I blocking set minimali di tipo Rédei di cardinalità minore di* $3(q+1)/2$ *in* $PG(2, q)$ $(q > 3)$, *si ottengono dal grafico di una funzione di* $GF(q)$ *in sè, lineare rispetto ad un sottocampo non banale di* $GF(q)$.

In [5] T. Szönyi studia i blocking set minimali in $PG(2, q)$ con meno di $3(q+1)/2$ punti (chiamati *small*) non necessariamente di tipo Rédei, provando che hanno una struttura simile a quella dei blocking set small di tipo Rédei. Questi risultati e il fatto che gli unici esempi di blocking set small noti fino a quel momento fossero di tipo Rédei, facevano pensare che i blocking set small minimali in $PG(2, q)$ fossero tutti di tipo Rédei. Ciò fu esplicitamente congetturato da A. Blokuis in [2].

L'obiettivo principale della presente tesi di Dottorato è stato quello di discutere la suddetta congettura, provando che essa è vera nei piani coordinati sul campo di Galois di ordine p^3 con p primo e $p > 3$ (primo caso aperto), ed è falsa nei rimanenti casi, cioè nei piani coordinati sul campo di Galois di ordine p^t con p primo e $t \geqslant 4$.

La tesi si articola in tre capitoli. Il primo capitolo constiste in un'introduzione alla problematica e il secondo consiste in una raccolta di risultati noti nella teoria dei blockimg set nei piani proiettivi finiti. Nei successivi due capitoli viene affrontato il problema dell'esistenza e della classificazione dei blocking set small nei piani proiettivi coordinati su campi di Galois.

2. – Tecniche polinomiali.

I risultati riportati nel terzo capitolo della tesi sono ottenuti mediante l'uso di tecniche polinomiali dette di tipo Rédei di cui si è già accennato nell'introduzione. Illustriamo qui di seguito come è possibile associare ad un blocking set un polinomio che permetta di studiarne la struttura.

Sia B un blocking set minimale non banale del piano proiettivo $PG(2, q)$. Sia L una retta del piano e sia $|B \cap L| = \mu_0 + 1$. Scegliamo un sistema di riferimento (O, X, Y) in modo che la retta L sia la retta all'infinito con equazione $x_2 = 0$ e il punto di coordinate omogenee $(0, 1, 0)$ appartenga a $B \cap L$. Sia $B \backslash L = \{(a_i, b_i) : i = 1, \ldots, q+\mu\}$ con $|B \backslash L| = q + \mu$. Siano $m_1, \ldots, m_{\mu_0}$ i coefficienti angolari delle rette passanti per un punto di $(B \cap L) \backslash \{(0, 1, 0)\}$. Definiamo *polinomio di Rédei* nelle due variabili x ed y, associato a B nel riferimento fissato, il seguente polinomio:

$$F(x, y) = \prod_{i=1}^{q+\mu} (x + a_i y - b_i) \prod_{j=1}^{\mu_0} (y - m_j).$$

Si prova che $F(x, y)$ può scriversi nella forma

$$F(x, y) = (x^q - x)G(x, y) + (y^q - y)\, H(x, y), \qquad (*)$$

dove $G, H \in GF(q)[x, y]$. Siano F_0, G_0 e H_0 rispettivamente le parti omogenee di F, G e H di grado massimo. Allora si ha

$$F_0(x, y) = \prod_{i=1}^{q+\mu} (x + a_i y)\, y^{\mu_0} = x^q G_0(x, y) + y^q H_0(x, y).$$

Ponendo in $F_0(x, y)$ la variabile y uguale ad 1, otteniamo

$$f_0(x) = \prod_{i=1}^{q+\mu} (x + a_i) = x^q g_0(x) + h_0(x),$$

dove $F_0(x, 1) = f_0(x)$, $G_0(x, 1) = g_0(x)$ ed $H_0(x, 1) = h_0(x)$. Il polinomio $f_0(x)$ (polinomio di Rédei nella sola variabile x) fornisce informazioni sulle rette secanti il blocking set passanti per il punto $P = (0, 1, 0)$. Infatti, il numero di secanti per $P = (0, 1, 0)$ diverse da L è pari al numero di radici distinte del polinomio $f_0(x)$. Inoltre, se n_i è la molteplicità algebrica di $-a_i$ come radice di $f_0(x)$, la retta per P di equazione $X = a_i$ interseca B in esattamente $1 + n_i$ punti.

Partendo dai risultati di T. Szönyi contenuti in [5] e dallo studio del polinomio $f_0(x)$ precedentemante introdotto nel caso $q = p^3$, si perviene al seguente teorema di classificazione dei blocking set small in $PG(2, p^3)$:

TEOREMA 4. – *Un blocking set small non banale in $PG(2, p^3)$ ($p > 3$ primo) è necessariamente di tipo Rédei. Inoltre, esso è isomorfo al blocking set definito dal grafico della funzione traccia di $GF(p^3)$ su $GF(p)$ oppure al blocking set definito dall'automorfismo di Frobenius di $GF(p^3)$.*

Questo risultato prova che la congettura citata nell'introduzione è vera nei piani $PG(2, p^3)$ $p > 3$ primo. Come applicazione di questo risultato si migliora la limitazione inferiore dell'ordine di un k-arco di un piano proiettivo (insieme di k punti a tre a tre non allineati) su campo di Galois di ordine p^3, p primo.

TEOREMA 4. – *Un k-arco completo in $PG(2, p^3)$ ha più di $\sqrt{3p^3} + \frac{1}{2}$ punti.*

3. – Blocking set lineari.

Un insieme $\mathcal{S}$ di sottospazi $(t-1)$-dimensionali di $PG(3t-1, q)$ prende il nome di *fibrazione* se gli elementi di $\mathcal{S}$ sono a due a due disgiunti e ricoprono tutto lo spazio. Una fibrazione in sottospazi $(t-1)$-dimensionali è detta *normale* se per ogni coppia di elementi distinti X e Y di $\mathcal{S}$, la fibrazione $\mathcal{S}$ induce una fibrazione $\mathcal{S}_T$ sul sottospazio $T = \langle X, Y \rangle$. È possibile rappresentare il piano proiettivo coordinato sul campo di Galois $GF(q)$ nello spazio proiettivo $PG(3t-1, q)$ mediante una fibrazione normale $\mathcal{S}$ di tale spazio. Infatti, indicato con $\mathcal{L}$ l'insieme delle fibrazioni S_T indotte sui sottospazi T congiungenti due elementi distinti di $\mathcal{S}$, la struttura di incidenza $\pi = (\mathcal{S}, \mathcal{L})$ con la naturale relazione di inclusione, è un piano proiettivo isomorfo a $PG(2, q^t)$ (B. Segre *Teoria di Galois, fibrazioni proiettive e geometrie non desarguesiane*, Ann. Mat. Pura Appl. 1964). Se L è un sottospazio t-dimensionale di $PG(3t-1, q)$, allora l'insieme

$$B_L = \{X \in \mathcal{S} : X \cap L \neq \emptyset\}$$

è un blocking set small minimale di π detto *lineare* ([4]).

Nel quarto ed ultimo capitolo della tesi si studia tale famiglia di blocking set. Si individuano varie condizioni sufficienti affinché il sottospazio L dia origine ad un blocking set B_L non di tipo Rédei. A partire da queste condizioni si costruiscono varie famiglie di esempi di blocking set lineari non di tipo Rédei in ogni piano proiettivo desarguesiano di ordine q^t con $t \geqslant 4$. A titolo di esempio si riporta uno dei teoremi ottenuti:

TEOREMA 5. – *Nel piano proiettivo $PG(2, q^t)$ esistono blocking set di cardinalità $q^t + q^{t-1} + \dots + q^r + 1$ per ogni $1 \leqslant r \leqslant t-2$ non di tipo Rédei. Inoltre, esistono almeno $\left\lfloor \frac{t}{2} - 2 \right\rfloor$ blocking set non di tipo Rédei a due a due non isomorfi e aventi tutti cardinalità $q^t + q^{t-1} + \dots + q + 1$.*

Questi risultati provano la falsità della congettura già citata nei piani $PG(2, q^t)$ con $t \geqslant 4$. Infine, nella parte terminale del quarto capitolo, si scrivono le equazioni esplicite di alcuni esempi precedentemente costruiti e, a partire da queste, si costruiscono esempi di blocking set small non di tipo Rédei in piani di traslazione non desarguesiani (piani di André) di ordine q^t.

BIBLIOGRAFIA

[1] BALL S., BLOKHUIS A., BROUWER A. E., STORME L. e SZÖNYI T., *On the number of slopes of the graph of a function defined on a finite field*, Journal of Combinatorial Theory A, in corso di stampa.

[2] BLOKHIUS A., *Special pointsets in finite planes*, CWI Quarterly, **9** (1997), 31-36.

[3] BRUEN A. A., *Blocking sets in finite projective planes*, SIAM J. Appl. Math., **21** (1971), 380-392.

[4] LUNARDON L., *Normal spreads*, Geom. Dedicata, in corso di stampa.

[5] SZÖNYI T., *Blocking sets in desarguesian affine and projective planes*, Finite Fields and their Applications, **3** (1997), 187-202.

Dip. di Matematica, Seconda Università di Napoli, Via Vivaldi - Caserta
e-mail: polverino@matna2.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli (Federico II)) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. F. Mazzocca, Seconda Università di Napoli (Caserta)