BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

FABIO PIOLI

Funtori integrali e fasci di Picard su varietà jacobiane e di Prym

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2000), n.1S, p. 173–176.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_173_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Funtori integrali e fasci di Picard su varietà jacobiane e di Prym.

FABIO PIOLI

1. – Introduzione.

Lo studio degli spazi dei moduli di fibrati su varietà algebriche nasce dall'esigenza di associare alle varietà in esame degli invarianti continui, le cui proprietà riflettano le proprietà della varietà di base. Inoltre gli spazi in questione forniscono nuovi esempi di varietà, spesso di notevole interesse, e hanno recentemente trovato applicazione in Fisica Teorica, come ad esempio nelle varie dualità che appaiono nell'ambito delle teorie delle corde. Uno strumento particolarmente efficace nello studio di fibrati e, più in generale, di alcuni spazi di moduli su varietà abeliane e superfici $K3$ è costituito dalle trasformate di Fourier-Mukai. Le trasformate di Fourier-Mukai sono funtori integrali invertibili tra le categorie derivate di fasci coerenti di due varietà. Più precisamente consideriamo due varietà algebriche lisce X e Y , e siano $D(X)$ e $D(Y)$ le categorie derivate dei fasci coerenti su X e Y . Sia $\mathcal{P}$ un fibrato sul prodotto $X \times Y$ (o più generalmente un elemento della categoria derivata $D(X \times Y)$). Si definisce un funtore integrale $\mathbf{R}\mathcal{F}: D(X) \rightarrow D(Y)$ ponendo

$$(1) \quad \mathbf{R}\mathcal{F}(-) = \mathbf{R}\pi_{Y,*}(\pi_X^*(-) \otimes \mathcal{P}),$$

dove π_X e π_Y sono le proiezioni canoniche di $X \times Y$ ed $\mathbf{R}\pi_{Y,*}$ è il funtore derivato di $\pi_{Y,*}$. L'invertibilità del funtore $\mathbf{R}\mathcal{F}$ riveste un ruolo particolarmente importante nello studio degli spazi dei moduli in quanto, in questo caso, è possibile convertire un problema concernente fibrati sulla varietà X in un problema, spesso di più semplice soluzione, sulla varietà Y . L'invertibilità assicura una perfetta equivalenza (isomorfismo di spazi dei moduli) tra le due situazioni geometriche in considerazione. Il primo esempio di funtore invertibile nel contesto delle varietà abeliane è dovuto a Mukai [3]; in questo caso X è una varietà abeliana, $Y = \widehat{X}$ è la varietà duale e $\mathcal{P}$ è un fibrato di Poincaré su $X \times \widehat{X}$. Per quanto riguarda alcune applicazioni delle trasformate di Fourier-Mukai allo studio di spazi di moduli, rimandiamo ad esempio a [4].

2. – Contenuto della tesi.

L'oggetto della tesi riguarda lo studio di alcuni funtori integrali di tipo Fourier-Mukai, in generale non invertibili, provenienti da curve immerse in varietà abeliane o da rivestimenti tra curve. In particolare si studiano le relazioni (in categoria derivata) di questi funtori con la trasformata di Mukai definita in [3] e al-

cune proprietà dei fasci trasformati di fibrati invertibili, o più generalmente di fibrati stabili; in questo ultimo caso i fasci trasformati hanno una certa rilevanza in quanto si possono interpretare in termini di fasci di Picard o generalizzazioni di essi. Un altro risultato ottenuto riguarda lo studio di alcune immersioni lagrangiane tra spazi di moduli. Per illustrare quest'ultimo risultato, consideriamo il seguente funtore (non invertibile):

$$(2) \quad \mathbf{R}\Phi_J(-) = \mathbf{R}\pi_{J(C),*}(\pi_C^*(-) \otimes \mathcal{P}_J)$$

dove C è una curva liscia di genere $g > 1$, $J(C)$ la jacobiana di C , e $\mathcal{P}_J$ il fibrato di Poincaré su $C \times J(C)$. Ricordiamo che se E è un fibrato stabile di rango r e grado d su C tale che $d > 2gr$, dove g è il genere della curva C , il trasformato $\mathbf{R}^0\Phi_J(E)$ è un fibrato stabile rispetto al divisore Θ sulla jacobiana $J(C)$ (cfr. [2]). Questo risultato ci consente di studiare il morfismo

$$\mathbf{R}\Phi_J: \mathfrak{M}_C(r, d) \rightarrow \mathfrak{M}_{J(C)}^{\mu}(d-r, -rl, 0, \dots, 0)$$

tra spazi di moduli di fibrati μ -stabili, dove l è la classe del divisore Θ . Usando la relazione tra il funtore $\mathbf{R}\Phi_J$ e la trasformata di Mukai abbiamo ottenuto il seguente

TEOREMA 1. – *Sia C una curva di genere 2. Siano r, d due interi coprimi tali che $d > 4r$. Sia $\mathfrak{M}_C(r, d)$ lo spazio dei moduli dei fibrati stabili su C di grado d e rango r . Il morfismo indotto da $\mathbf{R}\Phi_J$ determina un'immersione chiusa*

$$j: \mathfrak{M}_C(r, d) \rightarrow \mathfrak{M}_{J(C)}^{\mu}(d-r, -rl, 0)$$

dove $\mathfrak{M}^{\mu}(d-r, -rl, 0)$ è lo spazio dei moduli dei fibrati μ -stabili su $J(C)$ (rispetto al divisore Θ) di carattere di Chern $(d-r, -rl, 0)$. Inoltre, le sottovarietà $\mathfrak{M}_C(r, d)$ sono lagrangiane rispetto alla forma simplettica olomorfa su $\mathfrak{M}^{\mu}(d-r, -rl, 0)$ indotta dal prodotto di Yoneda.

Nel caso in cui $r \neq 1$ non è nota una caratterizzazione dello spazio $\mathfrak{M}_{J(C)}^{\mu}(d-r, -rl, 0)$. La determinazione delle proprietà dello spazio $\mathfrak{M}_{J(C)}^{\mu}(d-r, -rl, 0)$ attraverso le tecniche dei funtori integrali costituisce un'interessante problematica ancora da esplorare. Inoltre è possibile dimostrare che le sottovarietà $\mathfrak{M}_C(r, d)$ sono sottovarietà lagrangiane speciali nel senso di Harvey e Lawson rispetto ad un'opportuna struttura complessa su $\mathfrak{M}_{J(C)}^{\mu}(d-r, -rl, 0)$.

Un'altra questione affrontata nella tesi riguarda la relazione tra i fasci di Picard e i fibrati conormali di ordine superiore relativi a una curva immersa in un spazio proiettivo mediante una serie lineare completa. Consideriamo i funtori

$$(3) \quad \mathbf{R}\Phi_J^{(i)}(-) = \mathbf{R}\pi_{J(C),*}(\pi_C^*(-) \otimes \mathcal{P}_J^i)$$

dove $\mathcal{P}_J^i$ è l' i -esima potenza di $\mathcal{P}_J$, e

$$(4) \quad \mathbf{R}\Phi_{(i)}(-) = \mathbf{R}p_{2,*}(p_1^*(-) \otimes \mathcal{O}_{C \times C}(-i\Delta))$$

essendo C una curva liscia di genere $g \geq 1$, $\mathcal{O}_{C \times C}(-\Delta)$ l'ideale della diagonale in $C \times C$ e i un intero positivo. Siano x_0 un punto base fissato su C , β_{x_0} l'applicazione

di Abel-Jacobi e i_J l'isogenia determinata dalla moltiplicazione per i su $J(C)$. I trasformati di fibrati invertibili rispetto al funtore $\mathbf{R}\Phi^{(j)}$ sono pull back dei fasci di Picard mediante isogenie, mentre il trasformato di un fibrato invertibile L (di grado opportuno) rispetto al funtore $\mathbf{R}\Phi_{(i)}$ si può interpretare come l' i -esimo fibrato conormale rispetto all'immersione determinata da L (cfr. [1]).

PROPOSIZIONE 1. – *Sia C una curva liscia di genere $g > 1$. Sia E un fibrato stabile di rango r e grado $d > 2rg$ su C ; allora $\mathbf{R}^0\Phi_{(j)}^{(i)}(E)$ è un fibrato polistabile rispetto al divisore Θ su $J(C)$.*

La proposizione seguente mostra che il pull back di un fascio di Picard mediante l'isogenia determinata dalla moltiplicazione per un intero $i > 0$, ristretto alla curva C , coincide essenzialmente con il trasformato di un fibrato invertibile rispetto al funtore $\mathbf{R}\Phi_{(i)}$.

PROPOSIZIONE 2. – *Per ogni $i > 0$ esiste un isomorfismo functoriale*

$$\mathbf{R}\Phi_{(i)}((-) \otimes \mathcal{O}_C(ix_0)) \otimes \mathcal{O}_C(ix_0) \cong \mathbf{L}\beta_{x_0}^* \circ \mathbf{R}\Phi_{(i)}^{(j)}(-) \cong \mathbf{L}\beta_{x_0}^* \circ i_j^* \circ \mathbf{R}\Phi_{(j)}(-).$$

Nel caso di una curva ellittica, usando l'ultima proposizione si ottiene il teorema seguente che estende un risultato di Ein e Lazarsfeld (cfr. [1]).

TEOREMA 2. – *Sia $i > 0$ un intero. Sia C una curva di genere $g = 1$. Se E è un fibrato stabile su C di rango r e grado d tale che $d \neq ri$, allora il trasformato $\mathbf{R}^k\Phi_{(i)}(E)$ è polistabile su C , dove $k = 0$ se $d > ri$ e $k = 1$ se $d < ri$.*

Nel caso in cui $g > 1$ la semistabilità dei fibrati $\mathbf{R}^k\Phi_{(i)}(L)$ (L fibrato invertibile di grado opportuno) è stata congetturata da Ein e Lazarsfeld [1].

Un'altra applicazione della teoria delle trasformate di Fourier-Mukai riguarda lo studio della semplicità del fascio di Picard sulla varietà di Prym P associata a un rivestimento $\pi : C \rightarrow C'$ tra curve lisce. In modo analogo al caso jacobiano, i fasci di Picard su P sono definiti come trasformati di fibrati invertibili (di grado $d > 2g - 2$) rispetto al funtore

$$(5) \quad \mathbf{R}\Phi_{\mathcal{P}_P}(-) = \mathbf{R}\pi_{P,*}(\pi_C^*(-) \otimes \mathcal{P}_P),$$

dove $\mathcal{P}_P$ è la restrizione a $C \times P$ del fibrato di Poincaré su $J(C) \times J(C)$. Sia x_0 un punto di C e $d > 2g - 2$ un intero. Denotiamo il fascio di Picard corrispondente al fibrato invertibile $\mathcal{O}_C(dx_0)$ con il simbolo $W_{P,d}$, ossia $W_{P,d} = \mathbf{R}^0\Phi_{\mathcal{P}_P}(\mathcal{O}_C(dx_0))$. Il fascio di Picard così definito è la restrizione alla varietà P del fascio di Picard su $J(C)$. Ricordiamo il seguente risultato della teoria delle varietà di Prym-Tyurin: esiste un'isogenia $f: P' \rightarrow P$ tale che il pull back della restrizione del divisore Θ a P sia una polarizzazione principale su P' . Inoltre è possibile definire due morfismi $\varrho'_{x_0}: C \rightarrow P'$ e $\varrho_{x_0}: C \rightarrow P$ analoghi al morfismo di Abel-Jacobi. Per studiare le proprietà del fascio di Picard $W_{P,d}$ sulla varietà P è conveniente considerare il fascio di Picard sulla varietà principalmente polarizzata P' e determinare la relazione del funtore $\mathbf{R}\Phi_{\mathcal{P}_{P'}}$ (dove $\mathcal{P}_{P'}$ è per definizione il pull back di $\mathcal{P}_P$ a $C \times P'$) con la trasformata di Mukai corrispondente al fibrato di Poincaré su P' . I trasformati di fibrati rispetto a $\mathbf{R}\Phi_{\mathcal{P}_{P'}}$ si possono esprimere come trasformati di fasci (di tor-

sione) rispetto ad una trasformata (invertibile) di Mukai. Con questo approccio abbiamo ottenuto il seguente

TEOREMA 3. – *Se il morfismo ϱ'_{x_0} è birazionale sull'immagine, allora il fascio di Picard $W_{P,d}$ è semplice.*

Per quanto riguarda la stabilità di $W_{P,d}$ è possibile dare una condizione sufficiente che riduce la questione a un problema sulla stabilità di fibrati su curve. Precisamente siano Δ e Δ' i divisori diagonali su $C \times C$ e $C' \times C'$ rispettivamente ed m il grado del rivestimento. Con un procedimento simile a quello adottato da Ein e Lazarsfeld in [1] nel caso della stabilità dei fasci di Picard sulle jacobiane, si è ottenuta la seguente

PROPOSIZIONE 3. – *Se, per ogni fibrato invertibile K di grado $d > 2g - 2$ su C , il fibrato*

$$(6) \quad E = p_{2,*} (p_1^* K \otimes \mathcal{O}_{C \times C}(m\Delta - (\pi \times \pi)^{-1}\Delta'))$$

è stabile, allora il fascio di Picard $W_{P,d}$ è μ -stabile rispetto a $\Theta|_P$.

Osserviamo che lo studio della preservazione della stabilità del fibrato E della proposizione precedente è notevolmente più complesso che nel caso considerato in [1]. L'interesse dello studio della stabilità del fascio di Picard sulla varietà di Prym risiede nel fatto che molte proprietà come la semplicità o la stabilità, una volta note nel caso della varietà di Prym, si possono ottenere per i fasci di Picard sullo spazio dei moduli $\mathcal{M}_C(r, \xi)$ costituito dai fibrati stabili su C con determinante isomorfo a ξ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. EIN e R. LAZARSFELD, *Stability and restrictions of Picard bundles, with an application to the normal bundles of elliptic curves*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **179** Cambridge Univ. Press (1992), 149-156.
- [2] Y. LI, *Spectral curves, theta divisors and Picard bundles*, Internat. J. Math., **2** (1991), 525-550.
- [3] S. MUKAI, *Duality between $D(X)$ and $D(X)$ with its application to Picard sheaves*, Nagoyah Math. J., **81** (1981), 153-175.
- [4] S. MUKAI, *Fourier functor and its application to the moduli of bundles on an abelian variety*, Adv. Pure Math., **10** (1987), 515-550.

Dipartimento di Matematica, Università di Genova

e-mail: pioli@dima.unige.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Torino) - Ciclo IX

Direttore di ricerca: Prof. Daniel Hernández Ruipérez, Università di Salamanca