
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ANDREA PASCUCCI

Su una classe di operatori differenziali ipoellittici del second'ordine

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2000), n.1S, p. 157–160.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_157_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_157_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Su una classe di operatori differenziali ipoellittici del second'ordine.

ANDREA PASCUCCI

La tesi riguarda lo studio di alcuni problemi semilineari e di teoria del potenziale relativi ad una classe di operatori differenziali del second'ordine della forma seguente

$$(1) \quad L = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(z) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^N b_j(z) \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Qui $z = (x, t)$ indica il punto di $\mathbf{R}^{N+1}$ e i coefficienti a_{ij} , b_j sono funzioni regolari. Assumiamo che l'operatore L sia *parabolico degenere* (ossia che la matrice (a_{ij}) sia *semidefinita* positiva e simmetrica) e *ipoellittico* (ossia che $Lu \in C^\infty$ in senso debole implichi $u \in C^\infty$). Il prototipo di questa classe è chiaramente l'operatore del calore. Altri esempi di operatori di questo tipo sono gli operatori di Kolmogorov, fra cui

$$(2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{in } \mathbf{R}^3,$$

e l'operatore del calore associato al laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg. L'ipoellitticità di questi operatori degeneri si riconosce facilmente mediante la classica condizione di generazione di Hörmander.

La prima parte della tesi è dedicata ad uno studio sistematico di alcune questioni di teoria del potenziale. Poiché i principali risultati che proviamo sono di natura locale, assumiamo, senza perdita di generalità, che L coincida con l'operatore del calore al di fuori di un compatto di $\mathbf{R}^{N+1}$. Questa ipotesi risulta determinante nella dimostrazione del fatto che l'ipoellitticità di L è equivalente all'esistenza di una soluzione fondamentale *globale* Γ per L . La dimostrazione di questo primo risultato è ispirata al classico lavoro di Bony [1]. La tecnica utilizzata è quella della regolarizzazione ellittica e della costruzione di un ricoprimento aperto di $\mathbf{R}^{N+1}$ costituito da cilindri sui quali il problema di Dirichlet relativo a L è risolubile.

Chiaramente, data la generalità di L , non si ha un'espressione esplicita della relativa soluzione fondamentale Γ . Tuttavia siamo in grado di provarne alcune classiche proprietà qualitative. Anzitutto, proviamo una stima asintotica di Γ all'infinito in termini della soluzione fondamentale dell'operatore del calore. Tale risultato, benchè non inaspettato, richiede alcune modifiche non banali di risultati classici di unicità per l'equazione del calore su semispazi.

Questi risultati hanno un interesse proprio, in quanto estendono al caso N -dimensionale alcuni risultati noti in dimensione 1.

In secondo luogo, Γ ha la notevole proprietà di avere il supporto contenuto in un semispazio. Precisamente, proviamo che

$$(3) \quad \Gamma(x, t; y, s) = 0 \quad \text{per } t \leq s.$$

Utilizzando la proprietà (3) di Γ , proviamo che ogni funzione L -superparabolica, ossia ogni soluzione debole della disequazione

$$(4) \quad Lu \leq 0,$$

può essere localmente approssimata mediante una successione crescente di funzioni superparaboliche C^∞ . Tale risultato è ben noto per l'operatore del calore ed in tal caso è facilmente dimostrabile utilizzando l'usuale mollificazione. Tuttavia, in generale, nel caso di operatori a coefficienti variabili, il problema non è banale poichè la mollificazione classica fa perdere la proprietà di superparabolicità. Il problema della regolarizzazione delle soprasoluzioni di un operatore è stato affrontato già da Littman [7] nel 1963 nel caso di operatori uniformemente ellittici. Più recentemente, in [4] è considerato il caso dell'operatore del calore sul gruppo di Heisenberg e in [3] il caso di operatori parabolici in forma di divergenza con parte principale uniformemente ellittica. In [3], le successioni regolarizzanti sono costruite utilizzando opportuni operatori di media sugli insiemi di livello della soluzione fondamentale. Questo approccio non sembra poter essere generalizzato in quanto richiede precise stime asintotiche della soluzione fondamentale e delle sue derivate di ogni ordine vicino al polo. La tecnica che utilizziamo è nuova e sostanzialmente basata sulla proprietà (3).

Proseguiamo lo studio delle proprietà classiche della soluzione fondamentale, provando che Γ non è limitata vicino al polo, ossia vale:

$$(5) \quad \limsup_{z \rightarrow \zeta} \Gamma(z; \zeta) = \infty.$$

Inoltre, proviamo che

$$(6) \quad \int_{\mathbf{R}^N} \Gamma(x, t; y, s) dy = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}^N, t > s.$$

Come conseguenza di (5) e (6), otteniamo un teorema di unicità e rappresentazione delle soluzioni del problema di Cauchy relativo a L . Inoltre questi risultati permettono di dimostrare in maniera standard la seguente formula di rappresentazione per funzioni regolari (di classe C^2), sugli insiemi di livello della soluzione fondamentale:

$$(7) \quad u(z) = \int_{B_r(z)} u(\zeta) E_r(z; \zeta) d\zeta - \frac{1}{r} \int_0^r \int_{B_l(z)} \left(\Gamma(z; \zeta) - \frac{1}{l} \right) Lu(\zeta) d\zeta dl,$$

dove $E_r(z; \zeta)$, $r > 0$, è un nucleo che dipende da Γ e dalle sue derivate, e $B_r(z)$ è la cosiddetta palla parabolica di centro z e raggio r , definita da

$$(8) \quad B_r(z) = \left\{ \zeta \mid \Gamma(z; \zeta) > \frac{1}{r} \right\}.$$

Nel caso in cui L sia l'operatore del calore e u sia una temperatura, la formula (7) è la classica formula di media.

Il risultato principale del primo capitolo consiste nell'estensione della formula (7) alla classe delle funzioni superparaboliche. Tale formula sembra una naturale estensione della classica formula di rappresentazione di Green per le soluzioni dell'equazione di Poisson. Notiamo che essa appare nuova anche nel caso dell'operatore del calore.

Nella seconda parte della tesi consideriamo una classe meno generale di operatori a cui comunque appartengono l'operatore in (2) e l'operatore del calore sul gruppo di Heisenberg. Per questi operatori sono note precise stime globali della soluzione fondamentale e delle sue derivate. Studiamo l'esistenza di soluzioni globali positive del seguente problema di Cauchy semilineare

$$(9) \quad Lu = -u^p \quad \text{in } S_T \equiv \mathbf{R}^N \times]0, T[, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

dove $p > 1$. È noto che il problema (9) può non ammettere soluzione globale se il dato iniziale è abbastanza grande. In tal caso si ha il cosiddetto fenomeno di blow-up della soluzione. D'altra parte, nel lavoro classico di Fujita [2], in cui si considera il caso dell'operatore del calore, si prova che, se $p < 1 + \frac{2}{N} \equiv p^*$, allora non esistono soluzioni globali positive di (9) indipendentemente dal dato iniziale. Nel caso in cui $p > p^*$ e il dato iniziale u_0 sia sufficientemente piccolo, allora il problema ha soluzione globale. Il caso critico $p = p^*$ è stato studiato da vari autori e risulta che, per $p = p^*$, l'unica soluzione globale non-negativa è quella banale.

I risultati di Fujita sono stati successivamente estesi in numerose direzioni. Esistono risultati analoghi nel caso di un generico dominio al posto di $\mathbf{R}^N$ oppure nel caso di equazioni differenziali paraboliche che comprendono termini di reazione più generali. Inoltre sono stati considerati i casi dell'equazione delle onde e dell'equazione di Schrödinger semilineari. Una caratteristica notevole che accomuna questo tipo di problemi, anche sotto ipotesi molto differenti, è l'esistenza di un esponente critico p^* . In generale, il valore di p^* dipende in maniera essenziale tanto dall'equazione quanto dalla geometria del dominio. Nel caso di un operatore parabolico con parte principale uniformemente ellittica e coefficienti regolari e limitati, è nota l'esistenza di un esponente critico anche se, nella maggior parte dei casi, non se ne conosce l'espressione esplicita e non si hanno risultati sul caso critico $p = p^*$.

Il risultato principale che proviamo riguarda l'esistenza e l'espressione esplicita dell'esponente critico in termini della soluzione fondamentale dell'operatore. Inoltre, nel caso in cui l'operatore abbia opportune proprietà di invarianza rispet-

to ad un gruppo di dilatazioni in $\mathbf{R}^{N+1}$ (per esempio, nel caso dell'operatore in (2) o anche dell'operatore del calore sul gruppo di Heisenberg), studiamo anche il caso critico, riscontrando una completa analogia con i risultati classici. La tesi si conclude con un'ampia rassegna di esempi significativi.

Gli argomenti esposti nella tesi di dottorato sono, in parte, pubblicati sui lavori [5], [6], [8] ai quali si rimanda per maggiori dettagli e riferimenti bibliografici.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BONY J. M., *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **19-1** (1969), 277-304.
- [2] FUJITA H., *On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect., **I-13** (1966), 109-124.
- [3] GAROFALO N., LANCONELLI E., *Asymptotic behavior of fundamental solutions and potential theory of parabolic operators with variable coefficients*, Math. Ann., **283** (1989), 211-239.
- [4] GAROFALO N., SEGALA F., *Estimates for the fundamental solution and Wiener's criterion for the heat equation on the Heisenberg group*, Indiana U. Math. J., **39-4** (1990), 1155-1196.
- [5] LANCONELLI E., PASCUCCI A., *Superparabolic functions related to second order hypoelliptic operators*, apparirà su Potential Analysis.
- [6] LANCONELLI E., PASCUCCI A., *On the fundamental solution for hypoelliptic second order partial differential operators with non-negative characteristic form*, apparirà su Ricerche di Matematica.
- [7] LITTMAN W., *Generalized subharmonic functions: monotonic approximations and an improved maximum principle*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., III Ser., **17** (1963), 207-222.
- [8] PASCUCCI A., *Fujita type results for a class of degenerate parabolic operators*, apparirà su Advances Diff. Eq.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, P.za di P.ta S. Donato, 5 - 40127 Bologna

Indirizzo e-mail: pascucci@dm.unibo.it

<http://www.dm.unibo.it/~pascucci/web/Ricerca/Ricerca.html>

Dottorato in Matematica (Sede amministrativa: Bologna) - Ciclo X

Direttore di Ricerca: Prof. E. Lanconelli, Università di Bologna