Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paola Parenti

Combinatorica delle T-curve separanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 153–156.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_153_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 153-156

Combinatorica delle T-curve separanti.

Paola Parenti

All'inizio degli anni '80 O. Ya Viro [4] ha introdotto un importante metodo di costruzione di varietà algebriche reali che è effettivamente molto interessante sia perché lavora in ogni grado e in ogni dimensione, sia per la ricchezza di potenzialità ed applicazioni: per esempio Itenberg e Shustin hanno adattato questo metodo allo studio di campi vettoriali. Il metodo di Viro ha aperto una nuova strada nella direzione delle costruzioni di curve algebriche: i metodi classici erano basati sulla perturbazione di soli punti doppi non degeneri, invece Viro ha preso in considerazione singolarità più complicate ottenendo risultati straordinari: la classificazione delle curve di grado 7 è uno dei primi e più importanti risultati di questo metodo.

La tesi si occupa di un caso particolare del metodo di Viro, chiamato T-costruzione che permette di costruire curve algebriche, e in generale ipersuperfici algebriche in modo combinatorio.

Descriviamo brevemente la T-costruzione. Fissato un m intero positivo, si consideri il triangolo T in $\mathbb{R}^2$ di vertici $(0, 0)$, $(0, m)$, $(m, 0)$. Scegliamo una triangolazione Γ di T avente, come vertici, punti a coordinate intere. In seguito considereremo soltanto triangolazioni **primitive**, cioè aventi come vertici tutti i punti a coordinate intere di T. Sia inoltre ε una distribuzione di segni su T, cioè una funzione definita sull'insieme dei vertici di Γ a valori in $\{-, +\}$.

Utilizzando le simmetrie rispetto agli assi cartesiani e all'origine, costruiamo tre copie simmetriche di T ed estendiamo, per simmetria, la triangolazione Γ ad una triangolazione sull'unione $T^{\#}$ dei 4 triangoli. Estendiamo inoltre la distribuzione di segni su T ad una distribuzione di segni su $T^{\#}$ utilizzando il seguente criterio: se σ è la simmetria di $\mathbb{R}^2$ definita da $\sigma = ((-1)^a, (-1)^b)$, e $((-1)^a i, (-1)^b j)$ la copia simmetrica del vertice $(i, j) \in T$ avente segno $\varepsilon_{i,j}$, allora assegniamo al vertice $((-1)^a i, (-1)^b j)$ il segno $\varepsilon_{i,j}(-1)^{ai+bj}$.

Per ogni triangolo non avente vertici di stesso segno, costruiamo un segmento che unisca i punti medi dei lati aventi vertici con segno opposto. Sia K l'unione di questi segmenti. Usando la simmetria rispetto all'origine identifichiamo le facce di $T^{\#}$: lo spazio risultante T^* è omeomorfo a $\mathbb{R}P^2$. Sia A l'immagine di K in T^*

Definizione 1. – *A è la T-curva associata alla coppia* (Γ, ε).

La famiglia delle T-curve è molto interessante da studiare soprattutto perché la teoria sviluppata da Viro ci garantisce che sotto una particolare condizione di «convessità» della triangolazione la T-curva risultante è algebrica cioè ha lo stesso tipo di isotopia di una curva algebrica reale proiettiva piana non singolare di grado m.

DEFINIZIONE 2. – *Una triangolazione Γ di T è* **convessa** *se esiste una funzione convessa lineare a pezzi $\nu : T \to \mathbb{R}$ tale che*

a) ν è lineare su ogni triangolo di Γ.

b) *ν non è lineare sull'unione di ogni coppia di triangoli di Γ.*

TEOREMA 1. – *Sotto l'ipotesi di convessità della triangolazione Γ di T, esiste una curva algebrica reale proiettiva piana non singolare C di grado m ed un omeomorfismo $\mathbb{R}P^2 \to T^*$ che manda la curva C sulla T-curva A.*

La T-costruzione, che agisce come link tra la geometria algebrica reale e la geometria combinatoria, ha dato diversi risultati. Per esempio nel 1993 Itenberg [2] usando la T-costruzione, ha risolto uno dei problemi aperti nella topologia delle curve algebriche: ha trovato una famiglia di T-curve algebriche che fornisce un controesempio alla congettura di Ragsdale aperta sin dal 1906.

Fino ad oggi non è stato provato se la condizione di convessità sulla triangolazione sia strettamente necessaria per la validità del teorema di Viro. Se il teorema non fosse vero senza questa ipotesi di convessità, dovrebbe esistere una T-curva costruita con una triangolazione non convessa che viola almeno una proprietà delle curve algebriche. In realtà importanti lavori mostrano che diverse proprietà delle curve algebriche rimangono valide per le T-curve indipendentemente dalla convessità della triangolazione. Ad esempio un teorema di Harnack che ci garantisce che una curva algebrica reale proiettiva piana non singolare di grado m non può avere più di $\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$ componenti connesse, è stato dimostrato da Itenberg anche per le T-curve costruite a partire da una qualunque triangolazione.

Il lavoro della tesi di dottorato si può inquadrare anche in questo filone di ricerca: uno dei principali risultati afferma che la formula di Rokhlin valida per le curve algebriche reali è valida anche per le T-curve costruite con arbitrarie triangolazioni primitive. La formula di Rokhlin è un risultato importante nello studio delle curve algebriche reali ed è valida per particolari curve dette di «tipo I» che sono caratterizzate dal fatto che la parte reale della curva disconnette la sua complessificata e la sconnette in due parti ognuna delle quali induce una orientazione sulla curva reale. Queste due orientazioni, una opposta all'altra vengono dette le orientazioni complesse della curva e sono state introdotte nel 1974 da Rokhlin [3]. La formulazione classica della formula di Rokhlin, che è data in due diversi modi per il grado pari e dispari, è espressa in termini della disposizione reciproca delle componenti connesse, della loro orientazione e del grado della curva. Io ho lavorato con una formulazione diversa introdotta da Viro [5], che riassume in una unica espressione le due formulazioni classiche:

TEOREMA 2 **Formulazione di Viro per la formula di Rokhlin**. – *Per ogni curva algebrica reale proiettiva piana non signolare C di tipo* I *e grado m*

$$\sum_{F \in (\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}C)} ind^2_{\mathbb{R}C}(x_F)\, \chi(F) = \frac{m^2}{4}$$

Nella formula $\chi(F)$ è la caratteristica di Eulero della componente connessa F, x_F indica un punto appartenente ad F e $ind_{\mathbb{R}\mathrm{C}}(x_F)$ è l'indice del punto x_F rispetto alla curva $\mathbb{R}\mathrm{C}$, Data una curva algebrica C di tipo I in $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ dotata di una delle sue orientazioni complesse, possiamo considerare per ogni punto x appartenente all'insieme $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \mathrm{C}$, l'indice $ind_C(x)$ del punto rispetto alla curva. Possiamo calcolare questo numero nel seguente modo: consideriamo una retta per il punto x e trasversale alla curva C. Scegliamo un campo di vettori normale alla retta che si annulli nel punto x e che intersechi trasversalmente la curva C. Assegniamo ad ogni punto di intersezione tra la curva e la retta il valore $+1$ se l'orientazione locale della curva nel punto di intersezione concorda con il vettore normale alla retta, altrimenti assegniamo il valore -1. Sia α la somma dei valori assegnati ai punti di intersezione, allora l'indice in x è definito da: $ind_C(x) = \left| \frac{\alpha}{2} \right|$.

Si può facilmente verificare che l'indice non dipende dalla scelta della retta, del campo normale e dell'orientazione complessa. Inoltre si osserva che l'indice è costante su ogni componente connessa di $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \mathrm{C}$ quindi ind_C è una funzione ben definita su $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \mathrm{C}$ per ogni curva C di tipo I.

Il primo passo nello studio della formula di Rokhlin per le T-curve è stato dare una definizione di «tipo» per le T-curve. Lo scopo principale era trovare una definizione di tipo in modo tale che il tipo di una T-curva algebrica coincidesse con il tipo della curva algebrica ad essa associata ed in modo che il tipo di una T-curva fosse anche riconoscibile dai dati iniziali della T-costruzione: la triangolazione e la distribuzione di segni. Seguendo questa direzione viene data una definizione di tipo per le T-curve che soddisfa proprio queste caratteristiche e che è legata, in analogia al caso algebrico, all'esistenza per la T-curva di due orientazioni speciali, dette simmetriche, una opposta all'altra. Il punto chiave per dimostrare che il tipo algebrico coincide con il tipo per le T-curve è dato dall'esistenza di una superficie associata ad una T-curva descritta già da Haas [1], e che, nella tesi, viene dimostrato essere, nel caso algebrico, omeomorfa alla complessificata della curva algebrica modulo la coniugazione complessa. Il tipo I corrisponde alla orientabilità di questa superficie. Inoltre vengono fornite condizioni necessarie e sufficienti per una T-curva per essere di tipo I. Questo risultato è, insieme alla formula di Rokhlin per le T-curve uno dei risultati principali del lavoro ma, per problemi di notazioni, non è possibile enunciarlo formalmente in questo contesto. Una volta caratterizzato il tipo di una T-curva la dimostrazione della formula di Rokhlin per le T-curve può essere schematizzata nei seguenti passi:

- Si introduce una famiglia di T-curve dette T-curve massimali di Harnack (già studiate da Itenberg [2]). Esse sono T-curve aventi numero massimale di componenti connesse e sono costruite utilizzando speciali distribuzioni di segni dette distribuzioni di Harnack. Il tipo topologico della T-curva è indipendente dalla triangolazione primitiva scelta. Un primo risultato ci garantisce che:

LEMMA 1. – *Per ogni T-curva massimale di Harnack M di grado m*

$$\sum_{F \in (\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \mathbb{R}\mathrm{M})} ind^2_{\mathbb{R}\mathrm{M}}(x_F)\, \chi(F) = \frac{m^2}{4}$$

- Conoscendo la caratterizzazione delle T-curve di tipo I, vengono considerate due «operazioni» dette «modificazioni» che permettono, data una T-curva di tipo I, di modificarla per ottenere una nuova T-curva di tipo I.
- Le modificazioni ora definite conservano la formula di Rokhlin, cioè:

TEOREMA 3. – *Siano A e A′ due T-curve di tipo I ottenute una dall'altra mediante una modificazione, allora*

$$\sum_{F \in (\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{R}\mathrm{A})} ind^2_{\mathbb{R}\mathrm{A}}(x_F)\,\chi(F) = \sum_{F \in (\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{R}\mathrm{A}')} ind^2_{\mathbb{R}\mathrm{A}'}(x_F)\,\chi(F)$$

- Dalla caratterizzazione delle T-curve di tipo I segue in modo abbastanza semplice che data una qualunque T-curva di tipo I è possibile passare con un numero finito di modificazioni ad una T-curva massimale di Harnack.

Il risultato ottenuto può quindi essere così enunciato:

TEOREMA 4 **Formula di Rokhlin per le T-curve**. – *Per ogni T-curva A di tipo* I *e grado m*

$$\sum_{F \in (\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{R}\mathrm{A})} ind^2_{\mathbb{R}\mathrm{A}}(x_F)\,\chi(F) = \frac{m^2}{4}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] B. HAAS, *Real algebraic curves and combinatorial constructions*, *PhD thesis, to be published.*
[2] I. ITENBERG, *Countre-examples à la conjecture de Ragsdale*, C. R. Acad. Sci. Paris, **317** (1993), 277-282.
[3] V. A. ROKHLIN, *Complex orientations of real algebraic curves*, Funktional Anal. i Prilozhen, 8 (1974), 71-75.
[4] O. YA. VIRO, *Gluing of real algebraic plane curves and constructions of curves of degree 6 and 7*, Lecture Notes in Mathematics, **1060** (1984), 187-200.
[5] O. YA. VIRO, *Some integral calculus based on Euler characteristic*, Lecture Notes in Math., **1346** (1988), 127-138.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Via F. Buonarroti, 2 - 56127 Pisa
e-mail: parenti@dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo X
Direttori di ricerca: Prof. Galbiati Margherita, Università di Pisa
Prof. Itenberg Ilia, Università di Rennes I