Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Pietro Albano

Singolarità di funzioni semiconcave ed applicazioni al controllo ottimo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 13–16.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_13_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 13-16

Singolarità di funzioni semiconcave ed applicazioni al controllo ottimo.

PAOLO ALBANO

La classe delle funzioni *semiconcave* si presenta in modo piuttosto naturale nella teoria dei controlli e nella teoria delle equazioni di Hamilton-Jacobi (si può pensare alla semiconcavità come ad una regolarità intermedia tra la lipschitzianità e la regolarità C^1). Infatti, i primi risultati di esistenza ed unicità in grande di soluzioni generalizzate di equazioni di Hamilton-Jacobi furono trovati da Douglis e Kruzkhov in tale classe. Inoltre, come mostrato tra gli altri da Cannarsa, Frankowska, Sinestrari e dallo stesso autore, la semiconcavità gioca un ruolo fondamentale nell'individuare *condizioni di ottimalità* in problemi di controllo. Varie definizioni di semiconcavità sono presenti in letteratura; per semplicità, nel seguito, faremo riferimento alla seguente:

DEFINIZIONE 1. – *Dato un sottoinsieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è semiconcava (con modulo lineare) in Ω se, per ogni sottoinsieme compatto $K \subset \Omega$, la restrizione della funzione u a K si decompone nella somma di una funzione concava con una funzione di classe C^∞.*

Proprietà di semiconcavità sono state dimostrate (in differenti contesti e con diversi livelli di generalità) tra gli altri da Cannarsa, Krylov, Frankowska, Ishii, Lions, Pignotti, Sinestrari, Soner e dallo stesso autore.

1. – Propagazioni di singolarità.

Data una funzione semiconcava $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'insieme dei punti dove tale funzione non è differenziabile costituisce il cosiddetto *insieme singolare*, nel seguito denotato con $\Sigma(u)$. Il primo problema affrontato nella tesi consiste nell'analizzare la struttura di $\Sigma(u)$. Dalla definizione segue immediatamente che le funzioni semiconcave sono localmente lipschitziane, dunque, per il Teorema di Rademacher, sono differenziabili quasi ovunque. Quindi, $\Sigma(u)$ ha misura di Lebesgue n-dimensionale nulla ed ha senso definire l'insieme dei *gradienti raggiungibili* $D^*u(x)$ come segue: $p \in D^*u(x)$ se e solo se esiste una successione di punti di differenziabilità per u, $\{x_k\}$, convergente ad x tale che

$$\lim_{k \to +\infty} Du(x_k) = p\,.$$

DEFINIZIONE 2. – *Si dice che una singolarità in $x \in \Sigma(u)$ si propaga se la componente connessa di x in $\Sigma(u)$ ha dimensione (di Hausdorff) ≥ 1.*

L'analisi di esempi elementari suggerisce che la propagazione delle singolarità sia legata alla relazione tra il $D^* u(x)$ ed il suo involucro convesso, denotato con $D^+ u(x)$. Cannarsa e Soner osservarono che se u è una funzione semiconcava allora $D^* u(x) \subseteq \partial D^+ u(x)$. Vale il seguente risultato di propagazione:

TEOREMA 1. – *Siano $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione semiconcava ed $x \in \Sigma(u)$. Supponiamo che esista $p \in \partial D^+ u(x) \setminus D^* u(x)$ e sia*

$$\nu := \dim N_{D^+ u(x)}(p)$$

dove $N_{D^+ u(x)}(p)$ denota il cono normale a $D^+ u(x)$ in p. Allora, la singolarità in x si propaga. Inoltre, la componente connessa di x in $\Sigma(u)$ ha dimensione (di Hausdorff) $\geqslant \nu$.

Nel caso particolare della funzione distanza euclidea da un chiuso (non vuoto), l'ipotesi $\partial D^+ u(x) \setminus D^* u(x) \neq \emptyset$ è necessaria e sufficiente per avere propagazione di singolarità. Per altri risultati sulle singolarità della funzione distanza si veda oltre alla tesi anche il lavoro [4] al quale si rimanda per altri riferimenti bibliografici.

OSSERVAZIONE (i) *La condizione $\partial D^+ u(x) \setminus D^* u(x) \neq \emptyset$* garantisce che la singolarità in x si propaghi lungo insiemi di dimensione $\geqslant 1$.

(ii) *Di fatto nella tesi si dimostrano alcuni risultati più precisi tanto per $\nu > 1$ quanto per $\nu = 1$. In quest'ultimo caso le singolarità si propagano lungo archi lipschitziani con derivata destra non nulla nel punto di partenza. Tale proprietà permette di dimostrare un teorema di propagazione di singolarità per soluzioni di equazioni di Hamilton-Jacobi che mostra come gli archi singolari si possano ottenere risolvendo un'opportuna inclusione differenziale.*

Altri risultati di propagazione di singolarità sono dovuti ad Ambrosio, Cannarsa e Soner. Il confronto tra i vari risultati esistenti è sviluppato nella tesi.

2. – Singolarità in dimensione infinita.

Il secondo problema affrontato nella tesi è lo studio dell'insieme singolare di funzioni semiconcave definite in uno spazio di dimensione infinita. Una delle motivazioni alla base di tale analisi è l'applicazione di tale studio alla *funzione valore* associata a problemi di controllo di equazioni alle derivate parziali. In tale contesto, esistono diversi risultati di semiconcavità dovuti tra gli altri a Cannarsa, Frankowska, Lions. Il primo risultato fornito dalla nostra analisi riguarda la «taglia» dell'insieme singolare $\Sigma(u)$. Più precisamente si denota con $\Sigma_k(u)$ l'insieme costituito dai punti di $\Sigma(u)$ il cui superdifferenziale contiene una palla di dimensione k. L'analisi di semplici esempi suggerisce che più è grande k più $\Sigma_k(u)$ è «piccolo». Per precisare in che senso intendere il termine «piccolo» ricordiamo che un insieme si dice k-rettificabile se è immagine attraverso una funzione lipschitziana di un insieme k-dimensionale. Vale il seguente risultato:

TEOREMA 2. – *Sia Ω un sottoinsieme aperto di uno spazio di Banach reale separabile con duale separabile e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione semiconcava. Al-*

lora, $\Sigma_k(u)$ è numerabilmente $\infty - k$ rettificabile ossia può essere ricoperto da un numero numerabile di varietà lipschitziane di dimensione $\infty - k$. Inoltre, $\Sigma_{\infty - k}(u)$ è numerabilmente k rettificabile.

OSSERVAZIONE 2. – *Il teorema precedente è dimostrato nella tesi per una classe più ampia di funzioni semiconcave (rispetto a quella presentata in questo sunto). Su risultati di questo genere hanno lavorato tra gli altri Alberti, Ambrosio, Anzellotti, Cannarsa, Ossanna, Veselý, Zajíček e l'autore stesso.*

Per quanto riguarda la propagazione delle singolarità in dimensione infinita vale il seguente risultato:

TEOREMA 3. – *Siano Ω un sottoinsieme aperto di uno spazio di Hilbert reale X e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione semiconcava. Sia $x_0 \in \Sigma(u)$ e supponiamo che*

$$\exists p_0 \in D^+ u(x_0) \setminus D^* u(x_0)$$

e che esistano un vettore $q \in X \setminus \{0\}$ ed un numero $T_0 > 0$ tali che

$$\forall t \in]0, T_0] : p_0 + tq \notin D^+ u(x_0).$$

Allora, esistono un numero $0 < T \leq T_0$ e due archi lipschitziani $x, p : [0, T] \to X$ tali che

$$\forall t \in]0, T] : \langle x(t) - x_0, q \rangle < 0 \qquad (x(0), p(0)) = (x_0, p_0)$$

infine

$$\forall t \in [0, T] : (x(t), p(t)) \in \Sigma(u) \times D^+ u(x(t)).$$

Una conseguenza (non immediata) del risultato precedente è che la funzione valore associata ad un problema di Mayer con equazione di stato parabolica e costo finale regolare non ha singolarità isolate (per un enunciato preciso si rinvia alla tesi oppure a [3]).

3. – Applicazione al problema del tempo minimo.

La tesi si conclude con l'analisi della funzione tempo minimo in dimensione infinita. Si considera un problema di controllo ottimo per il sistema

$$y'(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u(t) \qquad (t > 0), \qquad y(0) = x,$$

con x che appartiene ad uno spazio di Banach reale X, A che genera un semigruppo analitico di tipo negativo, $f : X \to X$ una funzione lipschitziana e $u(\cdot)$ una funzione misurabile (detta *controllo*) che prende valori in una palla chiusa di X. Un problema modello per tale equazione è un sistema semilineare parabolico con controllo distribuito. Il problema del tempo minimo associato a tale sistema consiste nel trovare, per ogni $x \in X$, le traiettorie che raggiungono un prefissato bersaglio $\mathcal{K}$ (nel caso in esame una palla chiusa di X) nel minor tempo possibile. In questo modo si può definire una funzione (che eventualmente assume $+\infty$ come valore) $x \mapsto T(x)$ che associa ad ogni elemento di X il «miglior» tempo in cui tale punto raggiunge $\mathcal{K}$. Sotto un'ipotesi di locale controllabilità del sistema in $\partial\mathcal{K}$ ed opportune ipotesi di regolarità su f (tali da rendere il risultato applicabile ad operatori di Nemytskii in dimensione ≤ 3) vale il seguente risultato:

TEOREMA 4. – *La funzione* $T:\{x \in X : T(x) < +\infty\} \to [0, +\infty[$ *è semiconcava.*

Usando il teorema precedente ed alcune stime di Carleman per sistemi, si possono ottenere delle condizioni di ottimalità per il tempo minimo (vedi anche [2]). Inoltre, i punti singolari per la funzione tempo minimo possono essere caratterizzati come segue:

TEOREMA 5. – *Un punto è singolare per la funzione tempo minimo se e solo se da esso escono più traiettorie ottime.*

Dalla semiconcavità della funzione tempo minimo segue che si possono applicare i risultati di rettificabilità a $\Sigma(T)$. Vale inoltre il seguente risultato di propagazione di singolarità.

TEOREMA 6. – *Sia x un punto singolare di T tale che, per un certo $\theta \in]0, 1]$, $x \in D(-A)^\theta$ (dove $D(-A)^\theta$ denota il dominio di $(-A)^\theta$). Allora, x è il punto di partenza di un arco lipschitziano singolare* (*non costante*).

La tesi contiene inoltre vari esempi (vedi anche [1]) che illustrano e completano i risultati precedenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBANO P. e CANNARSA P., *Singularities of the minimum time function for semilinear parabolic systems*, ESAIM: Proceedings, 4 (1998), 59-72.

[2] ALBANO P., CANNARSA P. and SINESTRARI C., *Regularity results for the miimum time function of a class of semilinear evolution equations of parabolic type*, in corso di stampa su SIAM Journal on Control and Optimization.

[3] ALBANO P. e CANNARSA P., *Singularities of semiconcave functions in Banach spaces*, Stochastic Analysis, Control Optimization and Applications W. M. McEneaney - G. G. Yin - Q. Zhang (eds.) (volume in onore di W. H. Fleming), Birkhäuser, Boston (1999), 171-190.

[4] ALBANO P. e CANNARSA P., *Structural properties of singularities of semiconcave functions*, in corso di stampa sugli Annali Scuola Norm. Sup. Pisa Scienze Fisiche e Matematiche.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»
e-mail: albano@axp.mat.uniroma2.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma II) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Piermarco Cannarsa
Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»