Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marina Rosanna Marchisio

Ipersuperficie quartiche unirazionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 129–132.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_129_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 129-132

Ipersuperficie quartiche unirazionali.

Marina Rosanna Marchisio

Introduzione.

Lo studio della razionalità e unirazionalità delle varietà algebriche è uno dei problemi più affascinanti e nello stesso tempo più difficili della geometria birazionale. Fin dalla fine del secolo scorso numerosi geometri algebrici si sono dedicati a questo tipo di indagini partendo dalle varietà più semplici quali le ipersuperficie X_d di grado d di $\mathbf{P}^n$ e le loro intersezioni.

Se X è una varietà liscia, definita su un corpo K qualsiasi, di dimensione $n-1$, X è detta unirazionale se esiste una mappa razionale genericamente suriettiva (dominante) $\varphi : \mathbf{P}^{n-1} \to X$, mentre X è detta razionale se esiste una mappa birazionale $\varphi : \mathbf{P}^{n-1} \tilde{\to} X$.

Nel caso delle varietà di dimensione 1, cioè nel caso delle curve piane lisce, è noto che, per il Teorema di Lüroth, la nozione di razionalità coincide con la nozione di unirazionalità. Per le superficie di $\mathbf{P}^3$ definite su un campo K algebricamente chiuso con $K(\mathbf{P}^2)/K(X)$ estensione separabile, per il criterio di razionalità di Castelnuovo, le due nozioni coincidono ancora. Se, però, viene meno una delle due ipotesi fatte su K ciò non è più vero; esistono infatti vari controesempi, come quello dato da Shioda della superficie quartica X_4 di $\mathbf{P}^3$ definita su un campo algebricamente chiuso di caratteristica $p \neq 0$ e $p \equiv 3 \pmod 4$ che è unirazionale ma non razionale.

Per le varietà di dimensione $\geqslant 3$, a partire dalle più semplici che si possano considerare, quali le ipersuperficie cubiche, non è più vero che le due nozioni coincidono. Nel 1971 H. Clemens e Ph. A. Griffiths hanno infatti provato la non razionalità dell'ipersuperficie cubica X_3 di $\mathbf{P}^4$, che è invece unirazionale. Nel 1940 U. Morin ha provato che, data un'ipersuperficie X_d di $\mathbf{P}^n$ di qualunque grado d, esiste una costante $c(d)$ tale che la generica X_d in $\mathbf{P}^n$ sia unirazionale non appena $n \geqslant c(d)$. Questo importante risultato fu esteso nel 1949 da A. Predonzan alle intersezioni complete, ripreso e discusso in termini moderni nel 1979 da J. P. Murre e ridimostrato nel 1980 da C. Ciliberto nel caso in cui K sia un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0. Nel 1996 in [2] J. Harris, B. Mazur e R. Pandharipande hanno dimostrato l'unirazionalità della $X_d \subseteq \mathbf{P}^n$ non appena la codimensione del suo luogo singolare è sufficientemente grande rispetto a d ed n.

Per quanto riguarda le ipersuperficie quartiche X_4 di $\mathbf{P}^n$, studiate in particolare in questa tesi, U. Morin nel 1936 ha provato che per $n \geqslant 7$ la generica X_4 è unirazionale. Per $n = 6$ nel 1952, sempre Morin, ha dimostrato che la generica X_4 di

$\mathbf{P}^6$ definita su un corpo K qualsiasi è unirazionale. Nel 1998 A. Conte e J. P. Murre in [1] hanno dato una nuova e molto più semplice dimostrazione dell'unirazionalità della ipersuperficie quartica di dimensione 5 utilizzando in maniera essenziale un interessante teorema di Beniamino Segre del 1954 non disponibile a Morin. Per $n = 4$ e 5 il problema è ancora aperto, cioè non è noto se la generica ipersuperficie quartica X_4 di $\mathbf{P}^4$ e $\mathbf{P}^5$ sia unirazionale o no e questo è considerato uno dei problemi aperti più interessanti e difficili in questo tipo di questioni. Nel 1960 B. Segre in [6] ha dato un esempio di una particolare X_4 di $\mathbf{P}^4$ liscia di equazione

$$x_0^4 + x_0 x_4^3 + x_1^4 - 6x_1^2 x_2^2 + x_2^4 + x_3^4 + x_3^3 x_4 = 0$$

che è unirazionale. Nel 1971 in [4] V. A. Iskovskikh e Yu. Manin hanno provato che la generica ipersuperficie quartica di $\mathbf{P}^4$ non è razionale. Mediante l'esempio di B. Segre hanno quindi dato una risposta negativa, in dimensione 3, al problema di Lüroth, posto nel 1861, che si chiede se una varietà unirazionale è necessariamente razionale. Nella mia tesi di dottorato sono state costruite famiglie di ipersuperficie quartiche lisce unirazionali di $\mathbf{P}^4$ e $\mathbf{P}^5$ di dimensione rispettivamente 54 e 114 diverse dall'esempio di B. Segre. Ricordiamo infine che nel 1998 in [3] J. Harris e Yu. Tschinkel hanno studiato i punti razionali sulle quartiche, in particolare hanno provato che se $X_4 \subseteq \mathbf{P}^n$ è un'ipersuperficie quartica liscia definita su K e $n \geqslant 4$ allora per qualche estensione K' di K l'insieme $X_4(K')$ dei punti K'-razionali di X_4 è denso nella topologia di Zariski.

1. – Esempi di ipersuperficie quartiche unirazionali di dimensione 3 e 4.

Per trovare esempi di ipersuperficie quartiche unirazionali di dimensione 3 e 4 abbiamo utilizzato ed esteso la costruzione data da Conte e Murre in [1].

Innanzittutto abbiamo provato l'esistenza di una superficie razionale S^0 in $X_4 \subseteq \mathbf{P}^{m+1}$ definita su K_0, estensione finita di K, anche per $m = 3$ (per $m \geqslant 4$ ciò era stato provato in [1]). Abbiamo poi costruito il seguente fibrato in quadriche. Siano R un punto di S^0, H^0 un iperpiano di $\mathbf{P}^{m+1}$, $C_R(X_4)$ il cono tangente a X_4 in R, che è un cono quadrico di dimensione $m-1$, e $Q_R = C_R(X_4) \cap H^0$ l'ipersuperficie quadrica di dimensione $m-2$ ottenuta intersecando $C_R(X_4)$ con H^0. Consideriamo la varietà luogo su K_0 delle coppie di punti (R, P'), dove R è generico su S^0 e P' è generico su Q_R sopra $K_0(R)$:

$$X^+ = \{(R, P')/R \in S^0,\, P' \in Q_R\},$$

che è irriducibile, definita su K_0 e di dimensione m. Il fibrato in quadriche cercato è $\pi\colon X^+ \to S^0$, dove $\pi((R, P')) = R$. Se il fibrato, sopra un'estensione finita $K_1 \supset K_0$, relativamente a π_{K_1}, ammette una sezione σ sopra un aperto non vuoto $U \subseteq S^0_{K_1}$, cioè $(Q_R)_{K_1}$ ha un punto razionale sopra $K_1(R)$ e quindi è razionale sopra K_1, abbiamo che $X^+_{K_1}$ è una varietà di dimensione m, razionale su K_1. Considerando la mappa razionale $\varrho_{K_1}\colon X^+ \to X$ che manda la coppia (R, P') nel quarto punto di intersezione della retta $\overline{RP'}$ (che è contenuta in $C_R(X)$ per definizione di Q_R) con X, e osservando che essa è dominante, segue che la X_4 è unirazionale.

Per $m \geqslant 5$ l'esistenza di S^0 in X_4 è da sola sufficiente per concludere l'unirazionalità dell'X_4 (in virtù del teorema di B. Segre sopra ricordato), mentre per $m = 3$ e 4 l'esistenza di S^0 non è sufficiente. Notiamo che nel caso $m = 3$, Q_R è una conica e il fibrato $\pi : X^+ \to S^0$ è un fibrato in coniche; qualora venisse provato che tutti i fibrati in coniche sopra una superficie razionale sono unirazionali, la costruzione precedente implicherebbe automaticamente l'unirazionalità della quartica $X_4 \subseteq \mathbf{P}^4$. Il problema citato è però, anche se non si conoscono esempi di fibrati in coniche che non sono unirazionali, lungi dall'essere risolto. Per $m = 3$ e 4 esistono tuttavia particolari S^0 per cui il fibrato sopra costruito ammette una sezione razionale e di conseguenza la X_4 è unirazionale, ad esempio nei seguenti casi:

i) $S^0 \subseteq \mathbf{P}^3$ è una superficie quartica ad asintotiche separabili, cioè la congruenza generata dalle tangenti asintotiche al variare di R su S^0, contenuta nella grassmanniana delle rette di $\mathbf{P}^3$ $\mathbf{G}(1, 3)$, si spezza in due componenti irriducibili sopra un'opportuna estensione algebrica K_1 di K;

ii) la varietà di Fano $F_1(X_4)$ delle rette contenute in $X_4 \subseteq \mathbf{P}^n$ ha dimensione $2n - 7$ ed è quindi una curva per $n = 4$ e una varietà tridimensionale per $n = 5$. In quest'ultimo caso, ogni curva razionale contenuta in $F_1(X_4)$ individua una rigata razionale normale (superficie F_n di Hirzebruch) contenuta in X_4 le cui generatrici determinano una sezione del fibrato in quadriche $\pi : X^+ \to S^0$. Quindi:

TEOREMA 1. – *Ogni $X_4 \subseteq \mathbf{P}^5$ che contenga una superficie di Hirzebruch (in particolare, un piano) è unirazionale*;

iii) più in generale ancora, si potrebbe prendere come S^0 una qualsiasi superficie razionale contenente un fascio di asintotiche algebriche. Esempi di tali superficie sono stati dati da B. Segre.

2. – Costruzione di famiglie di ipersuperficie quartiche lisce e unirazionali di dimensione 3 e 4.

Consideriamo $S^0 \subseteq \mathbf{P}^3$ superficie quartica monoidale, i.e. con un unico punto triplo $T = (0:0:0:1)$, di equazione

$$x_3 \cdot \beta(x_0, x_1, x_2) - \alpha(x_0, x_1, x_2) = 0$$

dove α e β sono polinomi omogenei di grado 4 e 3. Osserviamo che l'esempio dato da Segre di X_4 di $\mathbf{P}^4$ liscia unirazionale contiene la superficie quartica monoidale ad asintotiche separabili di equazione

$$x_1^4 - 6x_1^2 x_2^2 + x_2^4 + x_3^4 + x_3^3 x_4 = 0 .$$

In [5] Predonzan ha dato una classificazione proiettiva completa di tutte le superficie quartiche monoidali ad asintotiche separabili; poiché non ha esplicitato la maggior parte dei calcoli che lo hanno portato a tale risultato, abbiamo provveduto a verificarli con l'ausilio dei sistemi di calcolo simbolico Maple V e CoCoA che oggi abbiamo a disposizione. La superficie quartica monoidale più generale ad asintotiche separabili, detta superficie tetraedrale, ha equazione

$$X_0X_1X_2X_3 + X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 - 2(X_0^2X_1^2 + X_1^2X_2^2 + X_2^2X_0^2) = 0$$

Il suo cono tangente cubico in T è costituito da 3 piani distinti non passanti per una retta e inoltre essa ha 6 punti doppi, vertici di un quadrilatero piano completo con trilatero diagonale uguale alla sezione del piano del quadrilatero con il cono tangente cubico. Utilizzando queste proprietà geometriche e con l'ausilio di Maple V, abbiamo determinato in modo rigoroso la sua equazione.

Se risolviamo il problema di calcolare la dimensione del sistema algebrico

$$\Sigma = \{X = X_4 \subseteq \mathbf{P}^r / \exists\, S \text{ tetraedrale, con } S \subseteq X\},$$

delle X_4 che contengono una superficie tetraedrale S, troviamo delle famiglie di X_4 in $\mathbf{P}^4$ e in $\mathbf{P}^5$ unirazionali. Nella tesi abbiamo provato il seguente

TEOREMA 2. – *Sia Σ come sopra. Se $r \geqslant 8$, $\Sigma = |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(4)|$. Se $r \leqslant 7$, Σ è un sistema algebrico irriducibile su K e* $\dim \Sigma = \binom{r+4}{4} + 4r - 32$.

Se $r \geqslant 6$ il teorema non aggiunge niente perché sappiamo che la generica X_4 è unirazionale, ma se $r = 4, 5$ abbiamo così costruito due famiglie di X_4 unirazionali e lisce di $\mathbf{P}^4$, $\mathbf{P}^5$ di dimensione rispettivamente 54, 114 (mentre $\dim|\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(4)| = 69, 125$).

BIBLIOGRAFIA

[1] CONTE A. e MURRE J. P., *On a Theorem of Morin on the Unirationality of the Quartic Fivefold*, Acc. Sc. Torino, Atti Sc. Fis., **132** (1998), 49-59.

[2] HARRIS J., MAZUR B. e PANDHARIPANDE R., *Hypersurfaces of Low Degree*, Duke Math. Jour., **95** (1998), 125-160.

[3] HARRIS J. e TSCHINKEL YU., *Rational Points on Quartics*, Duke Math. Alg. Geom. 9809015 (1998).

[4] ISKOVSKIKH V. A.e MANIN YU. I., 3-*Dimensional Quartics and Counterexamples to the Lüroth Problem*, Math. USSR Sb., **15** (1971), 141-166.

[5] PREDONZAN A., *Sulle superficie monoidali del quarto ordine ad asintotiche separabili*, Rend. Sem. Mat. Padova, **30** (1960), 215-231.

[6] SEGRE B., *Variazione continua e omotopia in geometria algebrica*, Ann. Mat. Pura Appl., **50** (1960), 149-186.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino
e-mail: marchisio@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Torino) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Alberto Conte, Università degli Studi di Torino