Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Gian Paolo Leonardi

Suddivisioni ottimali di domini n-dimensionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 109–112.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_109_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 109-112

Suddivisioni ottimali di domini n-dimensionali.

GIAN PAOLO LEONARDI

1. – Introduzione.

L'intento principale di questa tesi di dottorato è lo studio delle *partizioni di Caccioppoli*, cioè delle decomposizioni di un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ per cui l'*area* totale delle *interfacce* di separazione delle varie componenti risulti localmente finita. L'interesse per lo studio di tali oggetti matematici è motivato dalle notevoli applicazioni fisiche, tra cui la modellizzazione di *clusters di bolle di sapone* e lo studio delle configurazioni di equilibrio nei sistemi di *fluidi immiscibili* (si veda [5], [3]), nonché da problemi inerenti alla teoria della visione artificiale (modelli variazionali per la *segmentazione di immagini*, come ad esempio il funzionale proposto da D. Mumford e J. Shah in [4]).

2. – Problematiche affrontate nella tesi.

In primo luogo, ci si è posto il problema di definire uno *spazio metrico di partizioni* relativamente ad uno spazio di misura $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$, i cui elementi fossero partizioni di Ω con al più un'infinità numerabile di componenti. La scelta di considerare partizioni così generali dipende dal fatto che, in alcuni problemi variazionali di rilevante interesse (come ad esempio il problema di Mumford-Shah sopra menzionato), non è possibile fissare a priori un numero massimo di componenti, anzi, tale numero può risultare infinito in alcune circostanze. La costruzione adottata si fonda su alcune definizioni essenziali:

DEFINIZIONE 2.1. – *Si dice suddivisione di* (Ω, μ) *ogni successione* $\mathbb{E} = (E_h)_h$ *di sottoinsiemi misurabili di* Ω (*eventualmente di misura nulla*) *tali che* (i) $\mu(E_h \cap E_k) = 0$ *per ogni* $h \neq k$, (ii) $\mu\left(\Omega \setminus \overset{h=1}{\underset{\infty}{\bigcup}} E_h\right) = 0$. *Si definisce quindi* $Subd(\Omega, \mu)$ *come la collezione di tutte le suddivisioni di* (Ω, μ).

DEFINIZIONE 2.2. – *Per ogni* $\mathbb{E} \in Subd(\Omega, \mu)$ *si definisce l'insieme degli indici effettivi di* $\mathbb{E}$: $I_{\mathbb{E}} = \{i \in \mathbf{N} : \mu(E_i) > 0\}$. *Si introduce poi la seguente relazione di equivalenza su* $Subd(\Omega, \mu)$: *date due suddivisioni* $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, *diremo che* $\mathbb{E} \sim \mathbb{F}$ *se esiste una biiezione* $\phi : I_{\mathbb{E}} \to I_{\mathbb{F}}$ *tale per cui* $\mu(E_i \triangle F_{\phi(i)}) = 0$ *per ogni* $i \in I_{\mathbb{E}}$ ($A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$). *Infine, si costruisce la collezione di tutte le partizioni misurabili di* (Ω, μ), *ponendo*

$$Part(\Omega, \mu) = Subd(\Omega, \mu)/\sim .$$

Nel caso in cui $\mu(\Omega) < \infty$, si può definire la seguente funzione:

$$d_\mu(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \inf\{\delta_\mu(\mathbb{E}, \mathbb{F}) : \mathbb{E} \in \mathcal{E}, \mathbb{F} \in \mathcal{F}\},$$

dove $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in Part(\Omega, \mu)$ e $\delta_\mu(\mathbb{E}, \mathbb{F}) = \frac{1}{2} \sum_i \mu(E_i \triangle F_i)$. Si dimostra che questa funzione è una distanza su $Part(\Omega, \mu)$. Lo spazio metrico così generato risulta completo e separabile (qualora lo spazio di misura (Ω, μ) sia separabile rispetto alla metrica $\operatorname{dist}(A, B) = \mu(A \triangle B)$) e completo. Ulteriori proprietà, riguardanti in particolare la caratterizzazione della convergenza metrica e l'equivalenza di metriche, vengono poi analizzate.

Successivamente, si considerano speciali partizioni di un aperto $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, con μ misura di Borel, finita ed assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, per cui l'*area* $(n-1)$*-dimensionale* delle interfacce di separazione delle componenti è finita o localmente finita. Entra perciò in gioco il concetto di *perimetro* di una partizione dentro un aperto $A \subseteq \Omega$: $P(\mathcal{E}, A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i, A)$, dove $P(F, A) = \sup\left\{\int_F \operatorname{div} g(x)\, dx : g \in C_0^1(A; \mathbf{R}^n),\ \|g\|_\infty \leq 1\right\}$ è il perimetro dell'insieme F in A (nel senso di De Giorgi, si veda [1]). Lo spazio delle partizioni di perimetro localmente finito (o di Caccioppoli) in Ω viene indicato con $\mathbf{CP}(\Omega)$.

Qui di seguito vengono riportati alcuni risultati fondamentali (si veda [2]), i quali, potremmo dire, permettono alle partizioni di Caccioppoli di entrare a pieno titolo nel dominio del Calcolo delle Variazioni: abbiamo infatti due teoremi (di semicontinuità e di compattezza) che, in base al *metodo diretto*, assicurano esistenza di soluzioni, mentre il terzo teorema (di struttura) costituisce un primo ma fondamentale passo verso la regolarità.

TEOREMA 2.1 (Semicontinuità). – *Siano $\mathcal{E}, \mathcal{E}_h \in Part(\Omega)$, $h = 1, 2, \ldots$, e si supponga che $\mathcal{E}_h \to \mathcal{E}$ (cioè $d(\mathcal{E}_h, \mathcal{E}) \to 0$). Allora $P(\mathcal{E}, A) \leq \liminf_h P(\mathcal{E}_h, A)$ per ogni aperto $A \subseteq \Omega$.*

TEOREMA 2.2 (Compattezza). – *Supponiamo che $\mathcal{E}_h \in \mathbf{CP}(\Omega)$, $h = 1, 2, \ldots$, e che $\sup_h P(\mathcal{E}_h, A) < \infty$ per ogni aperto A relativamente compatto in Ω. Allora esiste una sottosuccessione k_h ed una partizione $\mathcal{E}_\infty \in \mathbf{CP}(\Omega)$, tale che $\mathcal{E}_{k_h} \to \mathcal{E}_\infty$.*

TEOREMA 2.3 (Struttura). – *Sia $\mathcal{E} \in \mathbf{CP}(\Omega)$ e sia $\mathbb{E} \in \mathcal{E}$ una suddivisione arbitrariamente scelta. Allora*

$$\mathcal{H}^{n-1}\left[\Omega \setminus \left(\bigcup_i E_i(1) \cup \bigcup_{i<j} S_{ij}\right)\right] = 0,$$

dove $\mathcal{H}^{n-1}$ rappresenta la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale in $\mathbf{R}^n$, $E_i(1)$ l'insieme dei punti di densità 1 per E_i, ed infine S_{ij} l'interfaccia tra le componenti E_i ed E_j ($S_{ij} = \partial^* E_i \cap \partial^* E_j$, con ∂^* indicante la «frontiera ridotta» nel senso di De Giorgi).

Il contributo originale della tesi viene ora brevemente presentato.
Inanzi tutto, si è mostrata l'esistenza ed unicità della **decomposizione in componenti «P-indecomponibili»** di un insieme di perimetro finito. Più precisamente,

dato $E \subseteq \mathbf{R}^n$ di perimetro e misura finiti, si dirà che E è *P-decomponibile* se esistono $E_1, E_2 \subseteq \mathbf{R}^n$ entrambi con misura positiva, disgiunti, tali che $E = E_1 \cup E_2$ e $P(E) = P(E_1) + P(E_2)$. Viceversa, E sarà detto *P-indecomponibile* qualora non sia P-decomponibile. Sotto queste condizioni, si dimostra che esiste un'unica partizione $\mathcal{E}$ di perimetro finito, tale che (a) $P(\mathcal{E}) = P(E)$, (b) $\mathbf{R}^n \setminus E$ è una componente di $\mathcal{E}$, (c) ogni componente di $\mathcal{E}$ diversa da $\mathbf{R}^n \setminus E$ è P-indecomponibile.

Si è quindi effettuato uno studio approfondito della tecnica del **blow-up** applicata alle partizioni, con la quale è possibile esaminarne le proprietà locali (mediante osservazione in scala via via sempre più piccola). Prima di passare alla descrizione dei risultati, premettiamo la seguente definizione: siano $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in Part(\mathbf{R}^n)$ ed $x_0 \in \mathbf{R}^n$; diciamo che $\mathcal{F}$ è un *blow-up* di $\mathcal{E}$ rispetto ad x_0, ovvero $\mathcal{F} \in \mathfrak{BU}(\mathcal{E}, x_0)$, se esiste una successione monotona crescente $(\lambda_h)_h$ di numeri reali positivi tendenti ad ∞, tale che, se si pone $\mathcal{E}_h = x_0 + \lambda_h(\mathcal{E} - x_0)$, la successione $\mathcal{E}_h$ converge a $\mathcal{F}$. La famiglia $\mathfrak{BU}(\mathcal{E}, x_0)$ contenente tutti i blow-up di $\mathcal{E}$ rispetto ad x_0 gode di una serie di proprietà, fra cui citiamo l'essere un «cono» rispetto alle dilatazioni, la chiusura e, sotto opportune ipotesi, la connessione in $Part(\mathbf{R}^n)$. Viene inoltre mostrato il seguente risultato: esiste una partizione $\mathcal{M}$ di perimetro finito in $\mathbf{R}^n$ (detta **generatore universale**), tale che $\mathfrak{BU}(M, 0) = Part(\mathbf{R}^n)$, ovvero, a patto di scegliere una successione opportuna di ingrandimenti di $\mathcal{M}$ vicino a 0, è possibile ottenere, come limite, una qualunque partizione di $\mathbf{R}^n$. Ciò dimostra che le partizioni di perimetro finito, pur possedendo buone proprietà che le distinguono dalle partizioni generiche, possono presentare una notevole irregolarità locale.

Qualora le partizioni in esame verifichino certe condizioni di «quasi-minimalità» rispetto al funzionale *perimetro*, si possono ottenere interessanti risultati riguardanti il blow-up di tali oggetti.

Prima di tutto, conviene sottolineare che proprietà quali l'**unicità** del blow-up (falsa, in generale) risultano a tutt'oggi sconosciute, ad esempio, per le partizioni di *area minima* (fatta eccezione di alcuni casi particolari, come ad esempio quando la dimensione dello spazio è sufficientemente bassa): nella tesi, peraltro, viene considerato il problema dell'unicità e si ottiene un risultato affermativo sotto ipotesi opportune.

Un altro fatto interessante è contenuto nel teorema seguente, cui si antepongono alcune definizioni: data una partizione $\mathcal{E} \in \mathbf{CP}(\Omega)$, e preso un aperto $A \subseteq \Omega$ limitato, si definisce *deviazione dalla minimalità* di $\mathcal{E}$ in A la seguente funzione:

$$\psi(\mathcal{E}, A) = P(\mathcal{E}, A) - \inf\{P(\mathcal{F}, A) : \mathcal{F} \text{ è una variazione compatta di } \mathcal{E} \text{ in A}\}.$$

Diremo perciò che $\mathcal{E}$ è una partizione di area minima in A se $\psi(\mathcal{E}, A) = 0$; diremo inoltre che $\mathcal{E}$ è debolmente minima in un punto $x_0 \in \Omega$ se $\psi(\mathcal{E}, B_r(x_0)) = \varepsilon(r)\, r^{n-1}$, con $\varepsilon(r)$ infinitesima quando $r \to 0$. Si definisce, infine, *perimetro normalizzato* in $B_r(x)$ la seguente funzione: $\alpha_{\mathcal{E}}(x, r) = r^{n-1} P(\mathcal{E}, B_r(x))$.

TEOREMA 2.4 (dell'Alternativa). – *Sia* $\mathcal{E} \in \mathbf{CP}(\mathbf{R}^n)$ *debolmente minima in* x *e si ponga* $l = \liminf_{r \downarrow 0} \alpha_{\mathcal{E}}(x, r)$ *ed* $L = \limsup_{r \downarrow 0} \alpha_{\mathcal{E}}(x, r)$. *Allora vale la seguente alternativa: se* $l = L$ *allora ogni* $\mathcal{F} \in \mathfrak{BU}(\mathcal{E}, x)$ *è una partizione conica di area minima con* $\alpha_{\mathcal{F}} = l$; *se invece* $l < L$ *allora per ogni* $\lambda \in [l, L]$ *esiste una partizione* $\mathcal{C}_\lambda \in \mathfrak{BU}(\mathcal{E}, x)$, *conica e di area minima, tale che* $\alpha_{\mathcal{C}_\lambda} = \lambda$.

In breve, il teorema sopra citato implica che un'eventuale «irregolarità» del blow-up di una partizione debolmente minima si accompagna alla presenza di un «continuum» di partizioni coniche di area minima a due a due non isometriche (fatto, quest'ultimo, che certamente non si verifica in $\mathbf{R}^n$, $n < 4$, e di cui non si ha prove, né in senso positivo né in senso negativo, per $n \geqslant 4$).

Infine si è considerato un particolare **problema variazionale** su partizioni. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ e sia $\mathbf{H} = (H_i)_i$ una successione di funzioni di $L^1(\Omega)$. Consideriamo il seguente funzionale: data $\mathcal{E} \in Part(\Omega)$, si pone $\mathbf{\Phi_H}(\mathcal{E}; \Omega) = P(\mathcal{E}, \Omega) + \inf_{\mathbb{E} \in \mathcal{E}} \sum_i \int_{E_i} H_i(x)\, dx$. La struttura metrica ed risultati ottenuti in precedenza sulle partizioni di Caccioppoli (in particolare, quelli riguardanti le partizioni con proprietà di minimalità) vengono utilizzati per lo studio del problema di minimo associato a $\mathbf{\Phi_H}$, il quale, in un certo senso, generalizza un noto problema di *frontiere con curvatura media prescritta* introdotto da U.Massari (si veda [1]). L'analisi effettuata contiene la dimostrazione dell'esistenza di soluzioni, il confronto con il problema classico e la soluzione del cosiddetto *problema inverso* (data $\mathcal{E}$, trovare $\mathbf{H}$ tale che $\mathcal{E}$ minimizzi $\mathbf{\Phi_H}$) ed una discussione finale sulla regolarità, il blow-up, la finitezza e le proprietà di densità delle soluzioni. Una possibile interpretazione fisica riguarda il riempimento ottimale di un contenitore Ω mediante fluidi immiscibili scelti all'interno di un set di fluidi disponibili (la particolarità sta nel fatto che la scelta dei fluidi è essa stessa un'incognita del problema). Un'altra applicazione rientra nell'ambito della segmentazione di immagini (alle H_i si possono, in qualche modo, associare i toni di grigio di un'immagine digitalizzata).

BIBLIOGRAFIA

[1] AMBROSIO L., *Corso introduttivo alla Teoria Geometrica della Misura ed alle superfici minime*, Scuola Norm. Sup., Pisa (1997).

[2] CONGEDO G. e TAMANINI I., *On the existence of solutions to a problem in multidimensional segmentation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 8 (1991), 175-195.

[3] MORGAN F., *Geometric Measure Theory: a Beginner's Guide*, Academic Press Inc., San Diego, CA, second ed. (1995).

[4] MUMFORD D. e SHAH J., *Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems*, Comm. Pure Appl. Math., **42** (1989).

[5] WHITE B., *Existence of least-energy configurations of immiscible fluids*, J. Geom. Anal., **6** (1996), 151-161.

Dipartimento di Matematica, Università di Trento; e-mail: gippo@science.unitn.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Trento) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Italo Tamanini, Università di Trento