Bollettino Unione Matematica Italiana

Eva Ferrara Dentice, Nicola Melone

Sugli isomorfismi tra spazi di Grassman

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-B** (1999), n.3, p. 655–661.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2B_3_655_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

Bollettino U. M. I.
(8) 2-B (1999), 655-661

Sugli isomorfismi tra spazi di Grassmann.

EVA FERRARA DENTICE - NICOLA MELONE (*)

Summary. – *In this paper we prove that any incidence-preserving bijection between the line sets of Grassmann spaces is induced by either a collineation or a correlation.*

1. – Introduzione.

Uno *spazio semilineare* è una coppia $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ costituita da un insieme non vuoto $\boldsymbol{P}$, i cui elementi si dicono *punti*, e da un insieme $\boldsymbol{L}$ di sottoinsiemi di $\boldsymbol{P}$, i cui elementi si dicono *rette*, tale che *due punti distinti appartengono ad al più una retta, ogni retta contiene almeno due punti e ogni punto è contenuto in almeno una retta*. Due punti p e q si diranno *congiungibili* se appartengono ad una retta. In tal caso scriveremo $p \sim q$ e denoteremo con $p \vee q$ la retta per p e q. Denoteremo inoltre con $X^{\perp}$ l'insieme dei punti congiungibili con ogni punto del sottoinsieme X. Uno spazio semilineare $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ in cui due qualsiasi punti sono congiungibili si dice *spazio lineare*. Un sottoinsieme X di punti di uno spazio semilineare si dice *sottospazio* se due suoi qualsiasi punti sono congiungibili e la retta per essi è contenuta in X. Diremo infine *isomorfismo* tra due spazi semilineari $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ e $(\boldsymbol{P}', \boldsymbol{L}')$ ogni biezione $\Phi: \boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{P}'$ che trasforma rette in rette con l'inversa.

Considerato uno spazio proiettivo $\mathbb{P}$ e un intero h, con $0 \leqslant h < \dim \mathbb{P}$, si definisce *spazio di Grassmann di indice h associato* a $\mathbb{P}$ la geometria di incidenza $\mathrm{Gr}(h, \mathbb{P}) = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ i cui *punti* sono gli h-sottospazi di $\mathbb{P}$ e le cui *rette* sono i *fasci* di h-sottospazi di $\mathbb{P}$ (un fascio essendo l'insieme degli h-sottospazi di $\mathbb{P}$ contenuti in uno stesso $(h+1)$-sottospazio e contenenti uno stesso $(h-1)$-sottospazio). Se $\mathbb{P} = PG(m, K)$ è uno spazio proiettivo di dimensione finita m su un corpo K, $\mathrm{Gr}(h, \mathbb{P})$ si denota anche con $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ e gli interi m, h si dicono *indici* dello spazio. In particolare $\mathrm{Gr}(m, 0, K)$ è lo spazio proiettivo $PG(m, K)$ e $\mathrm{Gr}(m, m-1, K)$ è lo spazio proiettivo $PG^*(m, K)$ duale di $PG(m, K)$. Se infine K è un campo, $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ si immerge in uno spazio

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del progetto nazionale di ricerca «Strutture Geometriche, Combinatoria e loro applicazioni» del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e del GNSAGA del CNR.

proiettivo $PG(N, K)$ di dimensione $N = \binom{m+1}{h+1} - 1$ mediante il *morfismo di Plücker* $p\colon \mathrm{Gr}(m, h, K) \to PG(N, K)$ che associa ad ogni h-sottospazio S di $PG(m, K)$ il punto di $PG(N, K)$ determinato dalle coordinate grassmanniane di S. Si dimostra che $\mathcal{G}(m, h, K) = p(\mathrm{Gr}(m, h, K))$ è una varietà algebrica rigata intersezione di quadriche di $PG(N, K)$, detta *varietà di Grassmann di indici* (m, h).

Due punti p e q di uno spazio di Grassmann $\mathrm{Gr}(h, \mathbb{P}) = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ sono congiungibili se, e soltanto se, il sottospazio $p \cap q$ di $\mathbb{P}$ ha dimensione $h-1$. Ne segue che la geometria di incidenza $\mathrm{Gr}\, h, \mathbb{P})$ è uno spazio semilineare. Si riconosce inoltre facilmente che le rette contenute nella varietà di Grassmann $\mathcal{G}(m, h, K)$ determinano su di essa una struttura di spazio semilineare e che il morfismo di Plücker $p\colon \mathrm{Gr}(m, h, K) \to \mathcal{G}(m, h, K)$ è un isomorfismo tra spazi semilineari.

Sull'insieme $\boldsymbol{P}$ dei punti di $\mathrm{Gr}(h, \mathbb{P})$ si definisce una metrica ponendo $d(p, q) = t$ se $t+1$ è la lunghezza minima delle catene $p_0 = p, p_1, \ldots, p_t = q$ di punti tali che $p_i \sim p_{i+1}$, per ogni $i = 0, \ldots, t-1$. Due punti p e q sono allora congiungibili se, e soltanto se, hanno distanza 1. E' ben noto (cfr. ad esempio [F-M]) che risulta $d(p, q) = t$ se, e soltanto se, $\dim(p \cap q) = h - t$.

Se h è diverso da 0 e da $m-1$, i sottospazi massimali dello spazio di Grassmann $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ si ripartiscono in due famiglie disgiunte Σ e $\mathcal{T}$. Un elemento di Σ è costituito dagli h-sottospazi di $PG(m, K)$ contenenti un fissato $(h-1)$-sottospazio, quindi è uno spazio proiettivo $PG(m-h, K)$ e un elemento di $\mathcal{T}$ è costituito dagli h-sottospazi di $PG(m, K)$ contenuti in un fissato $(h+1)$-sottospazio, quindi è uno spazio proiettivo $PG(h+1, K)$. Come osservato in [B-T], le principali proprietà grafiche della geometria di incidenza $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ sono le seguenti.

(1) *Tre punti a due a due congiungibili sono contenuti in uno stesso sottospazio massimale* (*i.e.* $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ *è un Gamma spazio*).

(2) *Due sottospazi di stessa famiglia ad intersezione non vuota si intersecano in un punto.*

(3) *Due sottospazi di famiglie diverse ad intersezione non vuota si intersecano in una retta.*

(4) *Ogni retta è contenuta in un sottospazio di* Σ *e in un sottospazio di* $\mathcal{T}$.

Considerati due spazi proiettivi $PG(m, K)$ e $PG(m, K')$ sui corpi K e K' e un intero h, con $0 \leqslant h \leqslant m-1$, siano $f\colon PG(m, K) \to PG(m, K')$ una collineazione, $c\colon PG(m, K) \to PG^*(m, K')$ una correlazione e $\delta\colon PG^*(m, K') \to$

$PG(m, K')$ la dualità di $PG(m, K')$. Si verifica facilmente che le applicazioni

$$\Phi_f\colon p \in \mathrm{Gr}(m, h, K) \rightarrow f(p) \in \mathrm{Gr}(m, h, K'),$$

$$\Phi_c\colon p \in \mathrm{Gr}(m, h, K) \rightarrow \delta(c(p)) \in \mathrm{Gr}(m, m-h-1, K')$$

sono due isomorfismi di spazi di Grassmann, che diremo *indotti* da f e c, rispettivamente.

Nel 1947 W. L. Chow [C] (cfr. anche [D]) ha provato che tutti gli isomorfismi tra spazi di Grassmann di stessi indici su corpi sono isomorfismi indotti. Da tale risultato segue in particolare che ogni biezione tra gli insiemi delle rette di due spazi proiettivi $PG(m, K)$ e $PG(m, K')$ che con l'inversa conservi l'incidenza è indotta da una collineazione o da una correlazione.

In questo lavoro abbiamo esaminato le biezioni tra le rette di due spazi di Grassmann $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ e $\mathrm{Gr}(n, k, K')$ che, insieme all'inversa, conservino l'incidenza. Il risultato da noi ottenuto è il seguente.

TEOREMA. – *Considerati due spazi di Grassmann* $\mathrm{Gr}(m, h, K) = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ *e* $\mathrm{Gr}(n, k, K') = (\boldsymbol{P}', \boldsymbol{L}')$, *sia* $\varphi\colon \boldsymbol{L} \rightarrow \boldsymbol{L}'$ *una biezione che, con* φ^{-1}, *conserva l'incidenza delle rette. Allora* $n = m$, $k = h$ *e* φ *è indotta da un isomorfismo di* $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ *su* $\mathrm{Gr}(m, h, K')$, *oppure* $m = n = 3$, $\{h, k\} = \{0, 2\}$ *e* φ *è indotta da una correlazione tra spazi proiettivi tridimensionali. Ne segue che* $\varphi\colon \boldsymbol{L} \rightarrow \boldsymbol{L}'$ *è indotta da una collineazione* $f\colon PG(m, K) \rightarrow PG(m, K')$ *o da una correlazione* $c\colon PG(m, K) \rightarrow PG^*(m, K')$.

2. – Dimostrazione del teorema.

Prima di passare alla dimostrazione del teorema esaminiamo più da vicino gli isomorfismi tra spazi di Grassmann. Consideriamo all'uopo due spazi proiettivi $PG(m, K)$, $PG(n, K')$ sui corpi K e K', due interi h, k tali che $0 \leq h \leq m-1$, $0 \leq k \leq n-1$, e gli spazi di Grassmann $\mathrm{Gr}(m, h, K) = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ e $\mathrm{Gr}(n, k, K') = (\boldsymbol{P}', \boldsymbol{L}')$. Sussistono le seguenti proprietà.

PROPOSIZIONE 2.1. – *Per una biezione* $\Phi\colon \boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{P}'$ *sono equivalenti le seguenti proprietà.*

(i) Φ *conserva le distanze.*

(ii) Φ *e* Φ^{-1} *conservano le distanze.*

(iii) Φ *e* Φ^{-1} *conservano la congiungibilità tra punti.*

(iv) Φ *è un isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. – L'implicazione (i)⇒(ii) segue dall'osservazione che, denotate con d e d' le metriche in $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ e $\mathrm{Gr}(n, k, K')$ rispettivamente, Φ è un'isometria tra gli spazi metrici $(\boldsymbol{P}, d)$ e $(\boldsymbol{P}', d')$. Le implicazioni (ii)⇒(iii) e (iv)⇒(i) sono ovvie e quindi resta da provare l'implicazione (iii)⇒(iv). Osserviamo intanto che per ogni sottoinsieme X dall'ipotesi segue:

$$\Phi(X^{\perp}) = (\Phi(X))^{\perp}.$$

Fissata allora una retta L di $\mathrm{Gr}(m, h, K)$, considerati due punti a, b di L e posto $L' = \Phi(a) \vee \Phi(b)$ e denotati con $S(L)$, $T(L)$ e $S(L')$, $T(L')$ i due sottospazi massimali per L e L' rispettivamente, risulta $\{\Phi(S(L)), \Phi(T(L))\} = \{S(L'), T(L')\}$ e inoltre $L = S(L)^{\perp} \cap T(L)^{\perp}$, $L' = S(L')^{\perp} \cap T(L')^{\perp}$. Ne segue:

$$\Phi(L) = \Phi(S(L)^{\perp} \cap T(L)^{\perp}) =$$
$$\Phi(S(L)^{\perp}) \cap \Phi(T(L)^{\perp}) = \Phi(S(L))^{\perp} \cap \Phi(T(L))^{\perp} = L'.$$

In modo del tutto analogo si verifica che Φ^{-1} trasforma rette in rette.

PROPOSIZIONE 2.2. – *Se Φ: $\mathrm{Gr}(m, h, K) \to \mathrm{Gr}(n, k, K')$ è un isomorfismo, allora risulta $n = m$ e $k = h$ oppure $k = m - h - 1$.*

DIMOSTRAZIONE. – Ovviamente Φ trasforma ogni sottospazio massimale $\mathcal{M}$ in un sottospazio massimale e inoltre Φ: $\mathcal{M} \to \Phi(\mathcal{M})$ è una collineazione tra spazi proiettivi. Considerata allora una retta L di $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ e i due sottospazi massimali $\mathcal{M}_1 = PG(h+1, K)$, $\mathcal{M}_2 = PG(m-h, K)$ per L, $\Phi(\mathcal{M}_1)$ e $\Phi(\mathcal{M}_2)$ sono i due sottospazi massimali per la retta $\Phi(L)$ e quindi risulta $h+1 = k+1$ e $m-h = n-k$ oppure $h+1 = n-k$ e $m-h = k+1$.

Da tali proposizioni segue che il risultato di Chow si può enunciare al modo seguente.

TEOREMA 2.3. – *Se Φ: $\mathrm{Gr}(m, h, K) \to \mathrm{Gr}(n, k, K')$ è un isomorfismo, allora $n = m$, $k = h$ oppure $k = m - h - 1$ e Φ è indotto da una collineazione o da una correlazione.*

Considerati in uno spazio di Grassmann $\mathrm{Gr}(m, h, K) = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ un punto x di un sottospazio massimale $\mathcal{M}$ e un piano proiettivo π, denoteremo nel seguito con $\mathcal{F}(x, \mathcal{M})$ e con $\mathcal{F}(\pi)$ rispettivamente la stella di rette di $\mathcal{M}$ di centro x e l'insieme delle rette di π. Chiameremo *stelle* le famiglie del primo tipo e *piani rigati* quelle del secondo tipo. Essendo una famiglia di rette di $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ a due a due congiungibili costituita da rette di uno stesso sottospazio massimale e essendo i sottospazi massimali di $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ spazi proiettivi, si ha ovviamente la seguente proprietà.

PROPOSIZIONE 2.4. – *Ogni insieme massimale di rette di* $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ *costituito da rette a due a due incidenti e congiungibili è una stella oppure un piano rigato.*

Siano ora $\mathrm{Gr}(m, h, K) = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$ e $\mathrm{Gr}(n, k, K') = (\boldsymbol{P}', \boldsymbol{L}')$ due spazi di Grassmann e sia $\varphi\colon \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}'$ una biezione che conservi l'incidenza delle rette insieme all'inversa. Suddividiamo la dimostrazione del teorema enunciato al n. 1 in vari passi.

PASSO I. – *φ conserva la congiungibilità delle rette. Ne segue che φ trasforma insiemi massimali di rette a due a due incidenti e congiungibili in insiemi massimali di rette a due a due incidenti e congiungibili.*

Siano L e M due rette disgiunte e congiungibili di $\mathrm{Gr}(m, h, K)$, x un punto di L e A e B due rette distinte per x incidenti M. Poiché φ e φ^{-1} conservano l'incidenza, le rette $\varphi(L)$ e $\varphi(M)$ sono disgiunte e risultano invece incidenti le seguenti coppie di rette $\varphi(L)$ e $\varphi(A)$, $\varphi(L)$ e $\varphi(B)$, $\varphi(M)$ e $\varphi(A)$, $\varphi(M)$ e $\varphi(B)$, $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$. Ne segue che il punto $\varphi(A) \cap \varphi(B)$ appartiene a $\varphi(L) \cup \varphi(M)$, altrimenti le rette $\varphi(L)$ e $\varphi(M)$ apparterrebbero al piano proiettivo generato dai punti $\varphi(A) \cap \varphi(B)$, $\varphi(A) \cap \varphi(L)$ e $\varphi(B) \cap \varphi(L)$. Si possono allora determinare quattro trasversali distinte R_1, R_2, R_3, R_4 di L e M con $\varphi(R_1)$, $\varphi(R_2)$ incidenti su $\varphi(L)$, $\varphi(R_3)$, $\varphi(R_4)$ incidenti su $\varphi(M)$ e tali che le altre coppie $\varphi(R_i)$, $\varphi(R_j)$ risultino disgiunte. Essendo $\mathrm{Gr}(n, k, K')$ un Gamma spazio, si trae che le rette $\varphi(L)$ e $\varphi(M)$ sono congiungibili. Siano ora L e M due rette incidenti e congiungibili di $\mathrm{Gr}(m, h, K)$, R una retta incidente entrambe in punti distinti e S una retta per il punto $L \cap M$ disgiunta da R. Poiché le rette $\varphi(R)$, $\varphi(S)$ sono disgiunte e entrambe incidenti $\varphi(L)$ e $\varphi(M)$, una di esse non contiene il punto $\varphi(L) \cap \varphi(M)$. Essendo $\mathrm{Gr}(n, k, K')$ un Gamma spazio, ne segue anche in tal caso che $\varphi(L)$ e $\varphi(M)$ sono congiungibili.

PASSO II. – *Se φ trasforma ogni stella in un piano rigato, allora $m = n = 3$, $\{h, k\} = \{0, 2\}$ e φ è indotta da una correlazione tra spazi proiettivi tridimensionali.*

Se risultasse $h \neq 0$, $m-1$, considerata una stella $\mathcal{F}(x, \mathcal{M})$ di $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ esiste una retta L per x non contenuta in $\mathcal{M}$. Posto allora $\mathcal{F}(\pi') = \varphi(\mathcal{F}(x, \mathcal{M}))$, la retta $\varphi(L)$ dovrebbe appartenere a $\mathcal{F}(\pi')$, il che è assurdo. Ne segue $h = 0$, $m-1$ e $\mathrm{Gr}(m, h, K)$ è uno spazio proiettivo $PG(m, K)$ o il suo duale. È sufficiente pertanto esaminare il caso $h = 0$. In tal caso, in base al Passo I le rette di $\mathrm{Gr}(n, k, K')$ sono a due a due congiungibili e quindi anche $\mathrm{Gr}(n, k, K')$ è uno spazio proiettivo. Poiché φ trasforma stelle in piani rigati, per il Teorema 2.3 si ha $m = n = 3$, $k = 2$ e φ è indotta da una correlazione.

Passo III. – *Supponiamo ora che φ trasformi una stella $\mathcal{F}(a, \mathcal{M}_0)$ in una stella. Ogni stella di centro un punto x di $\mathcal{M}$ è trasformata in una stella.*

Sia $\varphi(\mathcal{F}(a, \mathcal{M}_0)) = \mathcal{F}(a', \mathcal{M}')$ e supponiamo che esista un punto y di $\mathcal{M}_0$ tale che $\varphi(\mathcal{F}(y, \mathcal{M}_0)) = \mathcal{F}(\pi')$. La retta $\varphi(a \vee y)$ appartiene allora a $\mathcal{F}(a', \mathcal{M}') \cap \mathcal{F}(\pi') = \varphi(\mathcal{F}(a, \mathcal{M}_0) \cap \mathcal{F}(y, \mathcal{M}_0))$, inoltre le rette della famiglia $\mathcal{F}(a', \mathcal{M}') \cup \mathcal{F}(\pi')$ sono a due a due congiungibili (cfr. Passo I) e quindi contenute nello stesso sottospazio massimale $\mathcal{M}'$. Ne segue che le stelle $\mathcal{F}(a, \mathcal{M}_0)$ e $\mathcal{F}(y, \mathcal{M}_0)$ dovrebbero avere in comune il fascio $\varphi^{-1}(\mathcal{F}(a', \mathcal{M}') \cap \mathcal{F}(\pi'))$, il che è assurdo.

Passo IV. – *Ogni stella è trasformata in una stella.*

Sia $\mathcal{F}(x, \mathcal{M})$ una stella diversa da $\mathcal{F}(a, \mathcal{M}_0)$. In base al Passo III possiamo supporre $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}_0$. Se $x \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}$, $\varphi(\mathcal{F}(x, \mathcal{M}))$ non può essere un piano rigato in quanto ogni sua retta dovrebbe incidere tutte le rette della stella $\varphi(\mathcal{F}(x, \mathcal{M}_0))$. Supponiamo ora che $x \notin \mathcal{M}_0$ e che $\mathcal{M}$ abbia almeno un punto b in comune con $\mathcal{M}_0$. Per quanto appena osservato $\varphi(\mathcal{F}(b, \mathcal{M}))$ è una stella e quindi, per il Passo III, la stella $\mathcal{F}(x, \mathcal{M})$ è trasformata in una stella. Supponiamo infine $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_0$ disgiunti e sia $L_1, \ldots, L_t$ una catena di rette tali che $a \in L_1$, $x \in L_t$ e $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, t-1$, esistente per la connessione dello spazio di Grassmann $\mathrm{Gr}(m, h, K)$. Posto $p_i = L_i \cap L_{i+1}$ e denotato con $\mathcal{M}_i$ un sottospazio massimale per L_i, per quanto provato sopra le stelle $\mathcal{F}(p_i, \mathcal{M}_i)$ si trasformano in stelle e quindi anche $\mathcal{F}(x, \mathcal{M})$ si trasforma in una stella.

Le proprietà provate nei passi I, II, III e IV risultano ovviamente vere anche per φ^{-1}. Considerato un punto x di $\mathrm{Gr}(m, h, K) = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L})$, due rette L, M per x e il punto $x' = \varphi(L) \cap \varphi(M)$ di $\mathrm{Gr}(n, k, K') = (\boldsymbol{P}', \boldsymbol{L}')$, poiché φ e φ^{-1} trasformano stelle in stelle, ogni altra retta per x è trasformata da φ in una retta per x' e quindi è ben definita e biettiva l'applicazione:

$$\Phi \colon x = L \cap M \in \boldsymbol{P} \rightarrow x' = \varphi(L) \cap \varphi(M) \in \boldsymbol{P}' .$$

In base alla Proposizione 2.2 per completare la dimostrazione del teorema è sufficiente provare che Φ è un isomorfismo tra spazi di Grassmann cioè, per la Proposizione 2.1, che Φ e Φ^{-1} conservano la congiungibilità tra punti. È sufficiente provare che tale proprietà è vera per Φ. Considerati infatti due punti congiungibili x, y e un sottospazio massimale $\mathcal{M}$ per la retta $x \vee y$, le stelle $\mathcal{F}(x, \mathcal{M})$ e $\mathcal{F}(y, \mathcal{M})$ sono trasformate mediante φ in due stelle di centri i punti $\Phi(x)$ e $\Phi(y)$ le cui rette sono a due a due congiungibili (cfr. Passo I) e quindi $\Phi(x)$ e $\Phi(y)$ sono congiungibili.

BIBLIOGRAFIA

[B-T] A. Bichara - G. Tallini, *On a characterization of the Grassmann space representing the h-dimensional subspaces in a projective space*, Ann. Disc. Math., **18** (1983), 113-132.

[C] W. L. Chow, *On the Geometry of algebraic homogeneus spaces*, Ann. Math., **50** (1949), 32-67.

[D] J. A. Dieudonné, *La Géométrie des Groupes Classiques*, 3rd ed. Berlin, Heidelberg, New York, Springer (1971).

[F-M] E. Ferrara Dentice - N. Melone, *Sulla Geometria di Incidenza degli Spazi di Grassmann*, Preprint n. 2, Ist. Mat. II Univ. di Napoli, (1997).

Seconda Università degli studi di Napoli, Dipartimento di Matematica
Via F. Renella, Villa Vitrone - 81100 Caserta, Italia
E-mail: ferdenti@unina.it, melone@unina.it

Pervenuta in Redazione
il 16 marzo 1998