

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

GIUSEPPE GEYMONAT, JACQUES LOUIS LIONS

## **Ruolo degli strumenti matematici e numerici nella modellizzazione**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A—La  
Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.1, p. 7–24.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1998\\_8\\_1A\\_1\\_7\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1_7_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Ruolo degli strumenti matematici e numerici nella modellizzazione.

GIUSEPPE GEYMONAT - JACQUES-LOUIS LIONS

1. – A partire dalla metà del Diciassettesimo Secolo, la cupola di San Pietro a Roma, opera di Michelangelo, ha iniziato a presentare qualche segno di danneggiamento. Nel corso dei decenni seguenti sono apparse delle crepe sempre più numerose e grandi tanto che verso il 1740 cominciarono a sussistere dei seri dubbi sulla stabilità globale dell'intera struttura e divenne di cruciale importanza la scelta degli interventi da fare giacché la semplice azione di colmare le crepe (eventualmente con pezzi di marmo come nel 1735) non pareva sufficiente. Con un linguaggio attuale si può dire che la cupola costituiva un sistema *complesso* avente un comportamento *incognito*, *imprevisto*. La *risposta* di tale sistema alle prime *azioni* esercitate su di esso non era soddisfacente.

In effetti la coppia  $\{azione, risposta\}$  può essere utilizzabile per accrescere le nostre conoscenze sulle relazioni causali che governano il sistema solo se essa è poco o nulla influenzata da quei *fenomeni secondari* dei quali, almeno in un primo tempo, non si vuole (o non si può) tenere conto. In questo ambito il processo di modellizzazione svolge un ruolo essenziale giacché, mediante una opportuna *schematizzazione* (o *riduzione*, o *analogia*, ...), il sistema complesso viene sostituito con *un modello più semplice* che ne riassume gli aspetti giudicati essenziali.

Nel caso della cupola di San Pietro, il Marchese Giovanni Poleni, al quale il 12 gennaio 1743 il Papa Benedetto XIV aveva affidato il compito di analizzare la situazione e di proporre gli interventi necessari, osserva innanzitutto che essa poteva essere suddivisa in spicchi, anzi in doppi spicchi solidarizzati, ognuno dei quali doveva essere considerato come un arco di sezione variabile. Era poi ben noto che una catenaria omogenea rovesciata è la soluzione al problema di disporre a forma di arco una catena di sfere rigide (uguali e senza

attrito) in modo da assicurarne l'equilibrio globale. La tappa seguente della modellizzazione consiste nel suddividere ogni spicchio in sedici «cunei» per ognuno dei quali Poleni determina *sperimentalmente* la posizione ed il peso. Infine proseguendo l'analogia, egli costruisce una catena non omogenea con 16 sfere di piombo i cui pesi hanno le proporzioni dei pesi dei cunei. La configurazione ottenuta, peraltro assai simile a quella di una catenaria <sup>(1)</sup>, permette una pri-

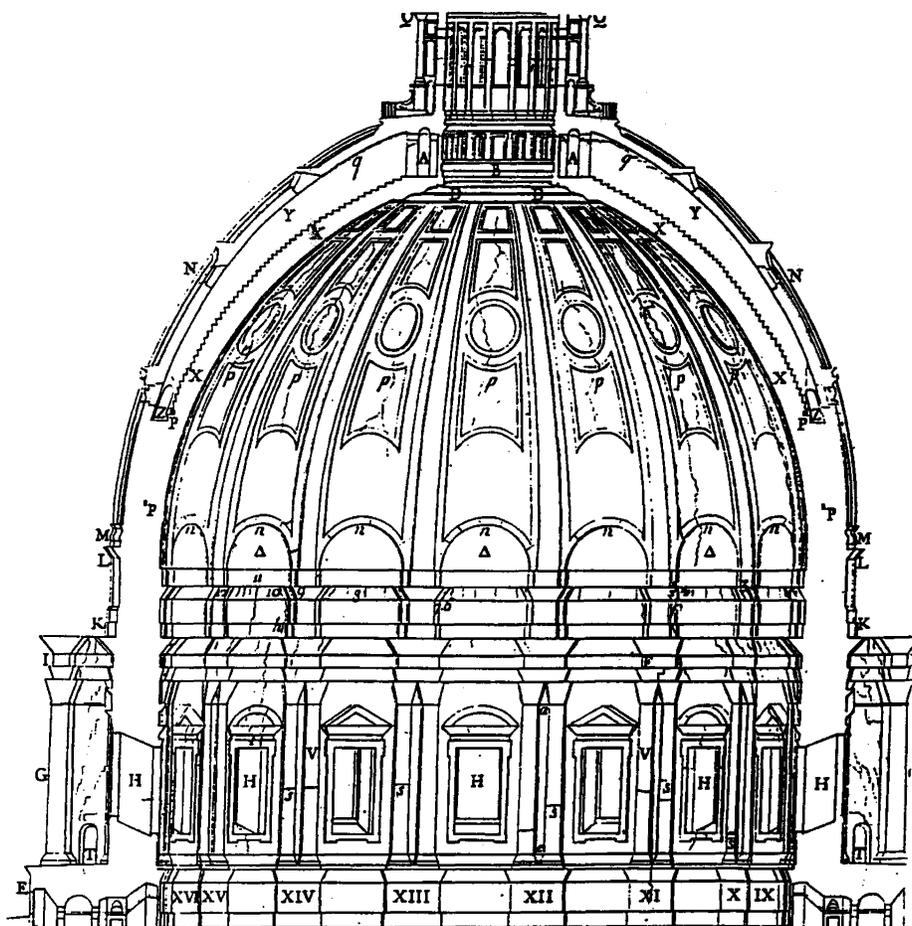


Fig. 1. - G. Poleni: *Memorie istoriche*, vol. 4, Tav. XVI.

<sup>(1)</sup> La forma «esatta» della catenaria non omogenea verrà determinata dall'Abate Charles Bossut nel 1770.

ma importante conclusione: la forma globale della volta michelangiotesca è soddisfacente.

Utilizzando la schematizzazione che ha condotto al modello, l'azione reale sul sistema viene tradotta in una azione teorica sul modello. La risposta teorica permette innanzitutto di giudicare se l'azione che si vuole esercitare può esplicitare le relazioni causali cercate. In tal caso il successivo confronto con la risposta reale del sistema permette sia di validare il modello che di vederne le limitazioni e quindi capire in quale modo esso vada modificato o addirittura abbandonato del tutto. In ogni caso la nostra conoscenza del sistema complesso viene ad essere accresciuta.

Anche se la forma globale della volta è soddisfacente, Poleni giudica opportuno accrescere la resistenza alla flessione dei doppi fusi mediante una cerchiatura formata da cinque catene in ferro le cui dimensioni sono da lui calcolate a partire da accurati dati sperimentali. Nel mese di giugno, Poleni fa pervenire le sue conclusioni che sono immediatamente approvate. I lavori inizieranno nel luglio dello stesso anno sotto la supervisione del Vanvitelli. La risposta del sistema reale ci permette, dopo più di 250 anni, di ammirare tutta la modellizzazione!

2. – Come viene costruito un modello? Secondo Poleni, «il miglior mezzo per conoscere le opere della Natura, sarebbe il contraffarle, e darne (per così dire) delle rappresentanze facendo produrre i medesimi effetti da cause, che fossero conosciute e poste fossero in azione» <sup>(2)</sup>. A tal fine si utilizzano *due guide*: da un lato *un impianto teorico* accettato a priori, si potrebbe dire in maniera metafisica (ad es. la meccanica newtoniana, ...) e dall'altro *quegli strumenti* (matematici, numerici, sperimentali) che conosciamo e dei quali sappiamo servirci. In una esauriente pubblicazione Poleni <sup>(3)</sup> non solo presen-

<sup>(2)</sup> Citato in A. CAVALLARI-MURAT, *Arti e scienze vitruviane dopo Galileo. Da Poleni e Lodoli a Stratico*, in *Giovanni Poleni*, Accademia Patavina, Collana Accademia, vol. 10, 1988, pp. 113-121.

<sup>(3)</sup> G. POLONI, *Memorie storiche della gran cupola del tempio Vaticano e de' danni di essa e de' ristoramenti loro*, Padova, nella Stamperia del Seminario, 1748.

tò il modello scelto per la cupola di San Pietro ma dette anche una precisa descrizione dell'impianto teorico e dei diversi strumenti utilizzati.

Quando il confronto della risposta reale del sistema con la risposta teorica non permette di validare il modello, si presentano diverse possibilità:

*a)* articolare meglio il modello, utilizzando ancora lo stesso impianto teorico e gli stessi strumenti;

*b)* cambiare gli strumenti pur conservando lo stesso impianto teorico;

*c)* cambiare l'impianto teorico (è questo tipicamente il caso delle rivoluzioni scientifiche).

Negli ultimi decenni il ruolo dell'impianto teorico e le ragioni dei suoi mutamenti (e il significato delle cosiddette rivoluzioni scientifiche) sono stati oggetto di un'ampia discussione tra gli

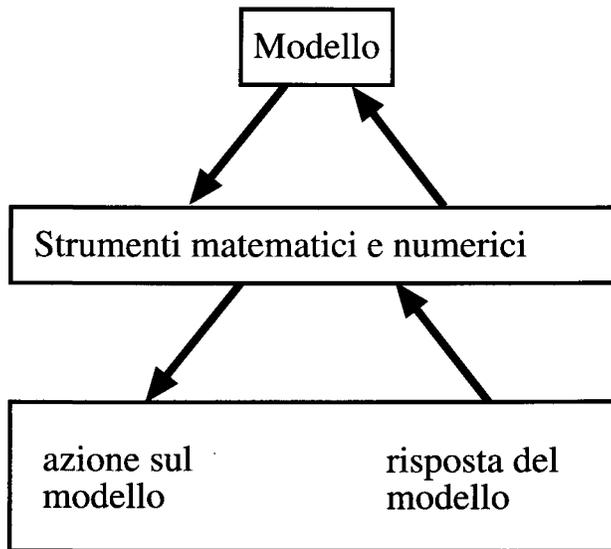


Fig. 2. – Schematizzazione delle relazioni fra il modello, il suo comportamento e gli strumenti. Naturalmente solo il confronto con il sistema *reale* è in ultima istanza decisivo per la *validazione*, la *modifica* o l'*abbandono* del modello.

storici e i filosofi della scienza, inaugurata dai lavori di Kuhn, Popper e Lakatos.

Ci sembra invece che il ruolo degli strumenti (matematici, numerici e sperimentali) sia stato meno analizzato. A nostro avviso i successi e gli insuccessi della modellizzazione hanno un effetto importante sugli strumenti utilizzati sia per suggerirne migliori applicazioni che soprattutto per stimolarne sviluppi innovatori. Va inoltre sottolineato che lo sviluppo di nuovi strumenti non solo è stimolato dalla modellizzazione ma a sua volta influisce sulla scelta delle azioni, sull'interpretazione delle risposte e quindi con un effetto di retroazione sull'articolazione stessa del modello, cf. fig. 2.

Inoltre, l'inadeguatezza di determinati strumenti può condurre in un vicolo cieco una modellizzazione peraltro estremamente innovatrice. La scuola galileiana ha esaurito il suo slancio nel momento in cui non ha saputo utilizzare i nuovi strumenti del calcolo differenziale ed ha voluto utilizzare solamente la teoria delle proporzioni.

3. – In questa sede ci interessa illustrare l'interazione complessa fra il modello e gli strumenti utilizzati seguendo alcune tappe dello sviluppo della modellizzazione del comportamento dei materiali e delle strutture.

Alla fine del XVIII secolo le pietre, i mattoni, il legno e la ghisa erano i materiali da costruzione di uso più corrente. La resistenza alla compressione delle pietre, dei mattoni e della ghisa veniva utilizzata per la costruzione di grandi strutture quali le volte ed i ponti ad arco. Le travi e le strutture reticolari sfruttavano la resistenza alla trazione ed alla compressione del legno. La teoria di Coulomb<sup>(4)</sup> forniva le basi teoriche alla modellizzazione ed al calcolo effettivo di tali strutture.

All'inizio del XIX secolo la situazione comincia a cambiare con lo sviluppo della laminazione del ferro e la possibilità di costruire

<sup>(4)</sup> CH. A. COULOMB, *Essais sur une application de maximis & minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans, Année 1773, vol. 7, 1776, pp. 343-382.

strutture reticolate in ferro fornisce nuove applicazioni ai metodi esposti nelle lezioni di Navier<sup>(5)</sup>. I ponti sospesi costruiti a Pietroburgo nel 1824-26 sono progettati da due giovani ingegneri francesi Lamé e Clapeyron<sup>(6)</sup>.

Negli anni immediatamente successivi, Navier, Cauchy, Poisson stabiliscono le equazioni generali del modello dell'elasticità lineare. Il problema di determinare gli sforzi e le deformazioni create in un corpo solido deformabile da un sistema di forze agenti all'interno e sul bordo (ovvero obbligato ad assumere una determinata configurazione attraverso un sistema di carichi imposti sul bordo) si riconduce, nell'ambito del modello dell'elasticità, al problema di determinare le funzioni che rappresentano le componenti dello spostamento dei punti del corpo. Tali funzioni risolvono un sistema di equazioni (lineari nel caso più semplice) alle derivate parziali all'interno del solido (dette equazioni di equilibrio o di campo) e soddisfano inoltre opportune condizioni sulla sua superficie.

Il primo metodo utilizzato per risolvere tale problema ai limiti consisteva nel cercare una soluzione particolare dell'equazione di equilibrio e nel verificare le condizioni al bordo mediante uno sviluppo in serie di funzioni speciali. In questo modo il problema veniva ricondotto ad equazioni differenziali ordinarie. Tale metodo, proposto inizialmente da Lamé e Clapeyron in Francia, funzionava però solamente per qualche configurazione geometrica particolare.

La seconda famiglia di metodi si sviluppò in seguito alle ricerche di Green sulla teoria del potenziale. Lord Kelvin nel 1848 e soprattutto Betti nel 1872 con il teorema di reciprocità mostrarono l'utilità di applicare la teoria del potenziale.

Infine una terza famiglia di metodi originò dall'osservazione di G. B. Airy (1862) che, nel caso bidimensionale, gli sforzi di un corpo soggetto a sole trazioni superficiali possono essere espressi mediante opportune derivate di una stessa funzione. Inoltre tale funzione è

<sup>(5)</sup> C.-L.-M.-A. H. NAVIER, *Résumé des leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, Parigi, 1826.

<sup>(6)</sup> G. LAMÉ - B. P. E. CLAPEYRON, *Mémoire sur l'emploi du fer dans les ponts suspendus*, Journal des Voies de Communication, vol. 5, 1826, pp. 19-43.

soluzione di una equazione alle derivate parziali relativamente semplice.

Qualunque fosse il metodo, le soluzioni esplicite potevano essere trovate solo per qualche caso elementare e quindi il modello della teoria generale dell'elasticità ebbe per molti anni un interesse soprattutto teorico.

Più interessante per le applicazioni fu la derivazione delle equazioni di equilibrio delle piastre introdotta nel 1828 da Poisson e Cauchy e sostanzialmente migliorata da Kirchooff a partire dal 1850. Si tratta tuttavia di equazioni (tipo l'operatore di Laplace) difficili da risolvere in generale, ma alle quali si possono applicare le prime due famiglie di metodi sopra indicate.

4. – Verso la metà del secolo lo sviluppo delle ferrovie è alla base della ricerca di nuove alternative nella costruzione dei ponti. Nel 1845 ad esempio, la ferrovia Londra-Chester-Holyhead richiede la costruzione di due ponti. La soluzione scelta appare molto originale ed ardua: costruire dei ponti coperti a struttura tubolare in ferro dentro i quali corrono i treni. Uno di essi, il Britannia Bridge sul Menai Strait nel Galles, ha la forma di una trave rettilinea di oltre 400 metri appoggiata su 4 piloni a 30 metri sopra il livello del mare. Come osserva Clapeyron<sup>(7)</sup> «gli ingegneri sono stati costretti a risolvere problemi talmente difficili che pochi anni prima parevano impossibili. ... In questo, come in altri casi, la pratica ha sorpassato la teoria. Tuttavia è necessario che quest'ultima intervenga per spiegare i fatti e stabilire delle regole laddove i nostri predecessori avevano solo vaghe intuizioni per guida».

Anche se Clapeyron è fra i primi a dare una formulazione generale del metodo dell'energia in elasticità, nelle applicazioni egli preferisce ricondursi a configurazioni abbastanza elementari quali le strutture reticolari formate da un numero finito di travi elastiche (cf. il richiamo sul principio di minimo). In effetti il calcolo è relativa-

(7) B. P. E. CLAPEYRON, *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés*, Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des sciences de Paris, vol. 45, 1857, pp. 1076-1080.

mente semplice nel caso di strutture staticamente determinate, alle quali ci si può ridurre, con opportuni artifici, nel caso più complicato di strutture staticamente indeterminate<sup>(8)</sup>. Il successo di tali metodi, ulteriormente accresciuto dall'uso del principio di Saint-Venant (1855), accentuò il distacco fra la teoria generale dell'elasticità ed i metodi usati nelle applicazioni concrete (tipicamente quelli della statica grafica).

Le previsioni ottenute con tali strumenti hanno permesso di affrontare sempre nuovi problemi «impossibili» dell'ingegneria civile e meccanica. I successi conseguiti hanno inoltre stimolato l'applicazione di tali metodi a strutture geometriche via via più complicate formate da piastre e da travi fra loro variamente collegate.

5. – Per allargare ulteriormente il campo delle possibili applicazioni della modellizzazione, all'inizio del nostro secolo sorge l'esigenza di disporre «di metodi rapidi, facili da capire ed adattabili a equazioni non usuali ed a domini irregolari. Tanto meglio se essi sono accurati benchè l'un per cento di errore sarebbe sufficiente in molte applicazioni»<sup>(9)</sup>. Tali metodi sono proposti da L. F. Richardson e consistono nel sostituire delle differenze finite alle derivate parziali. Naturalmente, osserva Richardson, per ottenere dei sistemi risolvibili bisogna tenere conto delle condizioni ai limiti.

Si tratta di una idea molto originale e innovativa. Gli esempi forniti da Richardson appaiono molto convincenti. Tuttavia tali metodi tardano ad avere il successo che meritano perchè mancano degli strumenti di calcolo adeguati.

Per comprenderne la ragione conviene partire da una osservazione di Richardson. L'efficacia di un metodo alle differenze finite dipende dall'errore commesso sostituendo le derivate con le differenze finite (nel linguaggio attuale tale errore viene detto errore locale

<sup>(8)</sup> In Italia tali metodi sono quelli della cosiddetta «tecnica delle costruzioni» nota in inglese come «strength of materials». Essi sono per esempio alla base delle normative per il dimensionamento delle costruzioni edili.

<sup>(9)</sup> L. F. RICHARDSON, *The Approximate Arithmetical Solution of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam*, Phil. Trans. Royal Soc., Ser. A, vol. 210, 1911, pp. 307-357.

di troncatura). Per diminuirlo, «una regola apparentemente di applicazione universale consiste nel prendere degli incrementi più piccoli e ripetere il calcolo», osserva Richardson. A conferma della bontà del metodo egli confronta, in alcuni casi semplici, i risultati numerici con quelli ottenuti per separazione delle variabili e sviluppi in serie di Fourier. Il confronto appare pienamente soddisfacente.

Qualche anno dopo Richardson cerca di applicare il metodo delle differenze finite ad un problema di evoluzione non lineare molto complicato: il problema della previsione del tempo. Il risultato si rivela del tutto insoddisfacente e quindi lo strumento proposto pare inadeguato.

Bisogna attendere una memoria fondamentale di R. Courant, K. Friedrichs e H. Lewy del 1928 per comprendere meglio la situazione. Questi autori non si pongono l'obiettivo di approssimare *l'equazione* alle derivate parziali ma piuttosto di approssimare *la soluzione* del corrispondente problema ai limiti e/o alle condizioni iniziali. Si tratta di un cambiamento di prospettiva assolutamente fondamentale: anche se i diversi termini dell'equazione vengono approssimati sempre meglio, non basta prendere «degli incrementi sempre più piccoli» per approssimare sempre meglio la soluzione di un problema alle derivate parziali. Nei problemi di evoluzione in particolare interviene in modo essenziale un parametro geometrico legato alla discretizzazione. Si tratta della cosiddetta condizione di stabilità (cf. il richiamo sulla discretizzazione dell'equazione delle onde). Nei primi esempi considerati da Richardson la condizione di stabilità era automaticamente soddisfatta perchè si trattava di problemi di elasticità stazionari (ellittici)<sup>(10)</sup>. Nell'applicazione alle meteorologia invece la situazione era completamente diversa: il metodo proposto non era stabile.

**6.** – Il cambiamento di prospettiva è dovuto anche all'analisi dei problemi ai limiti che Hadamard aveva fatto nel corso degli anni precedenti e che lo aveva condotto alla definizione di «problema ben

<sup>(10)</sup> A dire il vero Richardson considera anche l'equazione del calore con una discretizzazione che (per caso?) verifica tale condizione geometrica di stabilità.

posto». Un problema scritto sotto la forma astratta:

$$\text{Dato } f \in F \text{ cercare } u \in V \text{ tale che } Au = f$$

ove  $F$  o  $V$  sono opportuni spazi funzionali, si dice ben posto secondo Hadamard quando verifica le seguenti tre condizioni:

- i) la soluzione esiste;
- ii) la soluzione è unica;
- iii) la soluzione dipende con continuità dai dati.

Il primo requisito traduce il fatto che il modello matematico non impone condizioni fra loro incompatibili ed il secondo che le incertezze ed ambiguità sono escluse se non inerenti alla situazione fisica (come nel caso di autovalori). Tali requisiti appaiono perfettamente naturali nella scelta del modello.

Assai più delicato è il terzo requisito. Esso formalizza l'adagio «natura non facit saltus» mediante la condizione che una *piccola variazione* nel dato  $f \in F$  deve condurre ad una *piccola variazione* della soluzione  $u \in V$ . La «piccolezza» della variazione dipende dalla scelta di una opportuna distanza (o più in generale topologia) su ciascuno degli spazi  $F$  e  $V$ .

7. – Anche se l'analisi teorica di Courant-Friedrichs-Lewy permette di capire come utilizzare in maniera efficace lo strumento, i metodi alle differenze finite dovranno attendere ancora alcuni decenni prima di essere di piena utilità. In effetti rapidamente la mole di calcolo diventa proibitiva e non può essere effettuata a mano o con l'aiuto di una calcolatrice elettromeccanica.

Assai più utile si rivela l'analogia elettromeccanica: essa permette di costruire dei circuiti elettrici nei quali l'intensità ed il voltaggio delle correnti elettriche costituiscono l'analogo delle forze e degli spostamenti nella struttura reticolare meccanica. Essa è alla base dei calcolatori analogici.

La situazione cambia completamente, in particolare negli Stati Uniti, alla fine della seconda guerra mondiale per due ragioni concomitanti. Da un lato l'ingegneria aeronautica richiede il calcolo preciso di strutture sempre più complicate. Vengono pertanto costruiti

dei calcolatori analogici che permettono di analizzare strutture con un numero crescente di gradi di libertà (alcune centinaia agli inizi degli anni Cinquanta). Tali strutture richiedono la standardizzazione dei calcoli mediante una precisa formalizzazione in termini di matrici.

D'altro lato si sviluppano i primi calcolatori elettronici. Fin dalla fine del 1945, von Neumann è convinto che i calcolatori possono e devono diventare degli strumenti di ricerca. «Le capacità di un calcolatore devono essere giudicate alla luce del loro contributo a risolvere problemi di tipo nuovo ed a sviluppare nuovi metodi» scrive in una lettera del 23 gennaio 1946<sup>(11)</sup>.

A partire dal 1953 alla Boeing inizia l'uso sistematico dei calcolatori elettronici nell'analisi delle fusoliere. Esse sono ancora modellizzate mediante assemblaggi di piastre, nervature e longaroni. Ogni elemento ha un comportamento «semplice»<sup>(12)</sup>. Il procedimento si rivela molto efficace<sup>(13)</sup>. L'uso del nuovo metodo si diffonde molto rapidamente, anche se i calcolatori analogici continuano ad essere utilizzati (per esempio in Francia ancora nel 1967 l'ala del Concorde era analizzata con 2000 gradi di libertà su un calcolatore analogico).

All'inizio degli anni Sessanta, seguendo le idee di Clapeyron, viene data una formulazione variazionale e cominciano ad essere affrontate le questioni della convergenza e della maggiorazione dell'errore. Si tratta di problemi eminentemente teorici di interesse matematico che sono stati studiati approfonditamente in tutta la loro generalità negli anni Sessanta-Ottanta.

È utile ricordare che fin dal 1943 R. Courant aveva già affrontato e risolto il problema della convergenza. In effetti egli aveva studiato l'approssimazione della soluzione di un problema variazionale me-

<sup>(11)</sup> W. ASPRAY, *The mathematical reception of the modern computer: John von Neumann and the Institute for Advanced Study Computer*, Studies in Mathematics, vol. 26, The Mathematical Association of America, 1987, pp. 166-194.

<sup>(12)</sup> Si osservi la stretta analogia tra tale metodologia e quella usata da Poleni per la cupola vaticana.

<sup>(13)</sup> M. TURNER - R. W. CLOUGH - H. C. MARTIN - L. J. TOPP, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aeronaut. Sci., vol. 23, 1956, pp. 805-823.

dianze funzioni lineari a tratti definite su una triangolazione del dominio. Se la triangolazione è sufficientemente regolare la determinazione della soluzione così approssimata equivale a risolvere l'equazione alle differenze finite associata al problema. All'inizio degli anni Sessanta però tale lavoro era stato «dimenticato»!

8. – Grazie alle sempre maggiori potenzialità dei calcolatori ed ai risultati teorici sulla convergenza e sulla maggiorazione degli errori, il metodo degli elementi finiti si è rivelato uno strumento molto efficace per utilizzare il modello più generale dell'elasticità lineare anisotropa. La possibilità di usare tale modello generale ha inoltre rinnovato l'interesse ad una precisa determinazione sperimentale dei coefficienti elastici di molti materiali anisotropi.

Siccome le previsioni così ottenute si sono rivelate largamente coincidenti con i risultati sperimentali, esse hanno confortato l'impiego di molti materiali in sempre nuove condizioni «estreme»: i motori e le strutture dell'aeronautica, dell'astronautica, delle centrali nucleari, delle piattaforme petrolifere operanti in mare aperto, ecc. Per prevederne in maniera efficace il comportamento si è iniziato, alla fine degli anni Sessanta, ad utilizzare modelli più complicati<sup>(14)</sup>. Essi tengono conto di fenomeni nonlineari e/o irreversibili osservati sperimentalmente, il cui effetto veniva, fino ad allora, tradotto essenzialmente in termini di «fattori di sicurezza».

La simulazione numerica effettuata usando tali modelli è stata resa possibile dai calcolatori della terza e, soprattutto, quarta generazione. Essa ha a sua volta suggerito nuovi, difficili problemi matematici ed ha inoltre evidenziato la necessità di nuovi, delicati esperimenti per ottenere quelle costanti, caratteristiche di ogni materiale, presenti nella scrittura del modello.

9. – In tutto questo processo i calcolatori hanno assunto nel corso degli anni un ruolo sempre più importante. In effetti, la loro potenza sempre crescente rende possibile utilizzare modelli sempre

<sup>(14)</sup> Cf. per una esposizione generale, J. LEMAITRE - J. L. CHABOCHE, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, 1990.

più elaborati e complessi ed immaginare azioni sempre più ambiziose quali il controllo globale di sistemi anche molto complessi. A loro volta i successi di tali modelli e di tali azioni fanno sorgere sempre nuove problematiche di carattere teorico e fanno intravedere le possibili utilizzazioni di calcolatori ancora più potenti. In questa rincorsa apparentemente senza fine i calcolatori possono essere confrontati con il cannocchiale di Galileo. Bisogna saperli puntare verso il cielo ma bisogna anche saper sviluppare una teoria per interpretare le osservazioni.

I calcolatori hanno infatti una ulteriore peculiarità: rinviano all'opposizione discreto/continuo e utilizzano alcuni concetti strettamente connessi ai fondamenti della matematica: calcolabilità, decidibilità, complessità computazionale, ...

Grazie proprio a queste peculiarità l'uso dei calcolatori per agire in maniera efficace sui sistemi complessi richiede molta attenzione. In effetti quanto più un sistema è complesso, tanto più un piccolo intervento, ovvero un piccolo errore nelle previsioni, può avere una grande influenza sull'evoluzione del sistema.

È istruttivo considerare il seguente semplice esempio. Supponiamo che il modello, con le notazioni introdotte in precedenza, conduca al problema ben posto  $Au = f$  con  $F = V = \mathbf{R}^2$  ed  $A$  matrice quadrata  $2 \times 2$ , con determinante  $\neq 0$ . Supponiamo che risulti  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,01 \end{pmatrix}$ . Se  $f = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,01 \end{pmatrix}$  allora  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; se invece  $f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1,9 \end{pmatrix}$  allora  $u = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}$ . In questo caso il problema viene detto *mal condizionato*. Come riconoscere quando un problema è mal condizionato? Come eventualmente modificare la modellizzazione?

Per affrontare tali questioni, sono in generale necessarie sia delle riflessioni teoriche molto approfondite sulla modellizzazione usata che dei metodi numerici particolarmente accurati. Solo così si potrà analizzare correttamente la risposta del sistema alle azioni, ai controlli e quindi accrescere la nostra conoscenza.

## Un richiamo sul principio di minimo.

Giovanni Bernoulli può essere considerato il primo a indicare, in una lettera a P. Varignon nel 1717, l'applicabilità del principio degli spostamenti virtuali a tutti i casi di equilibrio di un sistema finito di forze applicate a dei punti eventualmente soggetti a vincoli. Il sistema di forze  $\mathbf{F}_i$  applicate nei punti  $\mathbf{P}_i$  è in equilibrio se e solo se risulta  $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i \leq 0$  per ogni sistema di spostamenti infinitamente piccoli  $\mathbf{v}_i$  dei punti  $\mathbf{P}_i$  che siano compatibili fra di loro e con i vincoli (tali spostamenti sono detti spostamenti *virtuali*). Se ogni spostamento virtuale  $\mathbf{v}_i$  è reversibile (e quindi gli spostamenti virtuali formano uno spazio vettoriale<sup>(15)</sup>), allora ci si può limitare all'uguaglianza. Una semplice applicazione è il teorema di Torricelli: condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema pesante è che il suo baricentro non possa abbassarsi con uno spostamento virtuale. Nel caso di una catena omogenea pesante di equazione  $y = y(x)$  fissata agli estremi  $A$  e  $B$  di coordinate  $(a, m)$  e  $(b, n)$  il baricentro ha

coordinate  $\left( \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx, \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx \right)$ . La configurazione di equilibrio di tale catena (la catenaria) minimizza  $\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$  fra tutte le configurazioni  $y(x)$  che verificano le condizioni agli estremi  $y(a) = m$  ed  $y(b) = n$  e che conservano la lunghezza  $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$ .

Nel 1740 Maupertuis formula la cosiddetta *loi du repos*. Il sistema delle forze  $\mathbf{F}_i$  è conservativo se il lavoro effettuato per passare da una configurazione iniziale ad una configurazione finale non dipende dalla successione di posizioni attraversate. In tale caso le forze  $\mathbf{F}_i$  derivano da un potenziale (ad esempio quando si riducono ai pesi delle masse poste nei punti  $\mathbf{P}_i$ ). La *loi du repos* afferma che, in un

<sup>(15)</sup> In effetti, da un punto di vista astratto, gli spostamenti virtuali formano sempre un cono: se  $\mathbf{v}$  è uno spostamento virtuale anche  $\lambda \mathbf{v}$  è ancora, per  $\lambda \geq 0$ , uno spostamento virtuale.

sistema conservativo con vincoli reversibili, il lavoro è massimo o minimo nella posizione di equilibrio (che Maupertuis chiama *position de repos*). L'estensione della *loi du repos* al caso della dinamica conduce Maupertuis a introdurre il principio di minima azione nel 1744.

Nello stesso anno Eulero, raccogliendo e generalizzando suoi precedenti risultati, pubblica a Losanna un'opera fondamentale *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietates Gaudentes*, nella quale considera i funzionali del tipo  $F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$ . Il metodo utilizzato consiste nel sostituire l'integrale con la somma dei valori calcolati in un numero finito di punti  $x_i$  e le derivate  $y'(x_i)$  con le differenze finite. In questo modo l'integrale diventa una funzione  $F(y_1, \dots, y_N)$  di un numero finito di variabili  $y_i = y(x_i)$ . Egli può allora far variare ogni  $y_i$  e, calcolate le variazioni di  $F$ , dimostrare che condizione necessaria affinché la funzione  $y(x)$  renda massimo o minimo  $F(y)$  è che essa verifichi l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y'' = 0.$$

Poichè la funzione  $f(x, y, y')$  è un dato, tale equazione, nota come equazione di Eulero, è una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine nell'incognita  $y(x)$ . Il metodo degli elementi finiti non è che una estensione del metodo usato da Eulero!

Qualche anno dopo Lagrange riprende il problema dal punto di vista usato ancora oggi. Egli introduce la variazione dell'intera funzione  $y(x)$ , da lui indicata  $y(x) + \delta y(x)$ . Tale funzione cambia il valore del funzionale  $F(y)$ . La variazione prima di tale funzionale è:

$$\delta F = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y'' \right) \delta y(x) dx.$$

La condizione  $\delta F = 0$  per ogni variazione  $\delta y(x)$  traduce in questo contesto il principio dei lavori virtuali e permette a Lagrange di ritrovare l'equazione di Eulero. Inoltre Lagrange estende il principio

dei lavori virtuali ed i risultati precedenti al caso di sistemi vincolati esprimendo l'azione dei vincoli mediante opportuni moltiplicatori.

Il metodo dei moltiplicatori permette di prendere in considerazione i vincoli geometrici sugli spostamenti di un sistema articolato di sbarre rigide; esso però non è sufficiente a determinare le condizioni di equilibrio nel caso dei sistemi staticamente indeterminati. Navier è il primo ad osservare, verso il 1825, che le condizioni mancanti possono essere ottenute considerando le sbarre elastiche. Poco tempo dopo Clapeyron applica in modo molto originale il principio dei lavori virtuali ad un sistema articolato di sbarre elastiche prendendo gli spostamenti reali come possibili spostamenti virtuali. Egli ne deduce che il lavoro delle forze esterne è uguale all'energia di deformazione associata agli sforzi del solido elastico.

Nel 1837 Green pone «un principio fisico generale» che unito al principio degli spostamenti virtuali permette di ottenere come equazione di equilibrio quelle stabilite da Cauchy e Navier. In assenza di carichi esterni il principio si scrive:

$$\iiint \delta\phi \, dx \, dy \, dz = 0$$

ove, nel caso di piccoli spostamenti, la funzione  $\phi$  è una funzione quadratica omogenea delle deformazioni (detta energia interna o energia di deformazione). Nel caso di un corpo isotropo tale funzione può essere molto semplificata.

È da notare che, alcuni anni prima, lo stesso Green aveva «dimostrato» che la funzione  $u$  che assume un valore assegnato sul bordo di un corpo e che verifica  $\Delta u = 0$  minimizza

$$\iiint \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx \, dy \, dz .$$

Si tratta di un risultato simile a quello ottenuto da Clapeyron per i sistemi di sbarre elastiche. Tuttavia occorreranno ancora circa 20 anni prima che un analogo principio di minimo venga enunciato in generale per un corpo elastico e più di un secolo per una sua dimostrazione rigorosa.

## Un richiamo sulla discretizzazione dell'equazione delle onde.

Ricordiamo che nel 1746 d'Alembert pubblica una memoria all'Accademia di Berlino dal titolo: *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, ove, generalizzando il modello discreto considerato da Giovanni Bernoulli nel 1727, dimostra che le vibrazioni infinitesime di una corda elastica omogenea, di lunghezza finita  $L$  e fissata ai suoi estremi ( $x=0$  ed  $x=L$ ) sono descritte dalla soluzione  $u(x, t)$  dell'equazione (oggi detta delle onde):

$$(*) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

che verifica le condizioni ai limiti  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  e le condizioni iniziali  $u(x, 0) = f(x)$  e  $(\partial u(x, t))/\partial t|_{t=0} = 0$  (all'istante iniziale la corda assume la configurazione iniziale  $y = f(x)$  e viene indi lasciata vibrare liberamente). Ad ogni istante di tempo  $t \geq 0$  la funzione  $y = u(x, t)$  rappresenta la «forma» assunta dalla corda.

La soluzione viene poi calcolata esplicitamente da d'Alembert che ottiene:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{f(x + at) + f(x - at)\}.$$

La forma di questa soluzione mostra che il valore di  $u$  nel punto  $(x^*, t^*)$  dipende solo dai valori del dato iniziale nel cosiddetto *intervallo di dipendenza*  $x^* - at^* \leq x \leq x^* + at^*$ .

Seguendo l'idea di Richardson, per approssimare la soluzione  $u(x, t)$  si introduce una reticolazione i cui nodi sono i punti  $P_{i,n}$  di coordinate

$$x_i = i \Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, \quad m = \frac{L}{\Delta x}, \quad t_n = n \Delta t, \quad n = 0, 1, \dots$$

sui quali si definisce la funzione  $u_{in} = u^{\Delta}(P_{in})$  mediante la seguente discretizzazione alle differenze finite dell'equazione (\*)

$$(**) \quad \frac{u_{i,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i,n-1}}{(\Delta t)^2} = a^2 \frac{u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad \text{per } 1 \leq i \leq m-1, \quad n \geq 1.$$

Per rendere il calcolo possibile tali formule vanno completate con le condizioni ai limiti

$$u_{0n} = u_{mn} = 0, \quad \text{per } n \geq 1$$

e le condizioni iniziali  $u_{i,0} = f(i\Delta x)$  e  $u_{i,1} = 0$  per  $0 \leq i \leq m$ .

Tutti i valori di  $u_{i,n}$  possono allora essere calcolati esplicitamente:

$$u_{i,n+1} = 2 \left[ 1 - \left( a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] u_{i,n} + \left( a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1,n} + u_{i-1,n}) - u_{i,n-1}.$$

Per questo motivo lo schema alle differenze finite (\*\*\*) viene detto schema esplicito.

Come nel caso continuo, si verifica che  $u^A(P_{i^*n^*})$  dipende solamente dai valori del dato iniziale contenuti nell'intervallo di dipendenza numerica  $x^* - (\Delta x/\Delta t)t^* \leq x \leq x^* + (\Delta x/\Delta t)t^*$ .

Se  $\Delta x$  e  $\Delta t$  tendono a 0 in modo che il rapporto  $\Delta x/\Delta t$  resti costante  $= k$  e si scelgono  $\Delta x$  e  $\Delta t$  in modo che le coordinate del nodo  $P_{i^*,n^*}$  non cambino, si vede che i valori, in tale nodo, di tutte le approssimazioni discrete successive dipendono solo dai valori del dato iniziale  $f(x)$  nell'intervallo  $x^* - kt^* \leq x \leq x^* + kt^*$ .

Courant, Friedrichs e Lewy determinano una condizione necessaria (e sufficiente, sotto opportune ipotesi di regolarità del dato iniziale) per la convergenza, qualunque sia il dato iniziale, della soluzione  $u^A(P_{i^*n^*})$  verso la soluzione dell'equazione delle onde  $u(P_{i^*n^*})$ . Tale condizione,  $a \leq k (= \Delta x/\Delta t)$ , significa che l'intervallo di dipendenza numerica deve contenere l'intervallo di dipendenza continua.

G. Geymonat: Laboratoire de Mécanique et Technologie  
E.N.S. de Cachan/C.N.R.S./Université Paris 6  
61 Avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex

J.-L. Lions: Collège de France - 5 rue d'Ulm, 75005 Paris