Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Andrea Colesanti

Convessità in dimensione finita

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 93–96.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_93_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 93-96

Convessità in dimensione finita.

ANDREA COLESANTI

La tesi ha per oggetto le funzioni convesse di un numero finito di variabili reali, e le superfici convesse in spazi euclidei di dimensione finita. Si considerano principalmente gli aspetti della regolarità e della struttura degli insiemi dei punti singolari. Gran parte dei risultati della tesi è contenuta nelle pubblicazioni [4], [6], [7] e [8].

Per semplicità di esposizione, in questa nota mi limiterò a considerare il caso delle funzioni, dipendenti da due sole variabili. Ritengo che la trattazione di questo caso particolare sia sufficiente a illustrare la natura dei risultati presentati nella tesi.

Il primo argomento che affrontiamo è quello della regolarità. Consideriamo una funzione f definita in un sottoinsieme aperto e convesso Ω del piano. Quali proprietà di regolarità di f possono essere dedotte, sapendo che essa è convessa?

La traccia da seguire per rispondere a questa domanda, è fornita dallo studio del caso unidimensionale. È ben noto che se una funzione è convessa in un intervallo aperto della retta reale, allora è continua, derivabile ovunque eccettuato al più un insieme numerabile, ed è derivabile due volte quasi ovunque (rispetto alla misura di Lebesgue). Queste proprietà di regolarità sono ottimali: si costruiscono esempi di funzioni convesse prive di derivata prima in insiemi (numerabili) di infiniti punti, e prive di derivata seconda in insiemi (di misura nulla) non numerabili.

Torniamo al caso di funzioni di due variabili. Un primo risultato, di semplice dimostrazione, afferma che f è localmente lipschitziana in Ω. Ciò implica che f è continua, ed è differenziabile quasi ovunque in Ω. Riguardo la differenziabilità seconda, sussiste il seguente Teorema di Aleksandrov-Busemann-Feller:

TEOREMA 1. – *Sia Ω un sottoinsieme aperto e convesso del piano e sia f convessa in Ω. Allora f è differenziabile due volte quasi ovunque in Ω.*

Questo teorema è stato provato, in una prima versione, da Busemann e Feller in [5], e la sua dimostrazione è stata data in forma completa da Aleksandrov nel 1939 ([2]). Da allora fino a tempi recenti, molte altre dimostrazioni sono seguite. Nella tesi viene fatta una breve rassegna di tali dimostrazioni, volta soprattutto a mettere in luce le varie tecniche, anche molto diverse tra loro, che sono state utilizzate. Inoltre si dà una nuova dimostrazione del teorema. Il risultato provato è in realtà lievemente più generale del Teorema 1, in quanto prova l'equivalenza tra la differenziabilità seconda di f in un punto x, e la differenziabilità del gradiente di f in x. L'idea alla base della dimostrazione è la seguente: si fissi un punto x di Ω

in cui f è differenziabile, e si supponga, per semplicità, che $f(x)$ e $\nabla f(x)$ siano nulli. Per ogni $h > 0$, si considera la funzione $g_h(x) = f(hx)/h^2$, ottenuta da f mediante un riscalamento delle variabili, centrato in x, ed un'opportuna normalizzazione. Si studia la convergenza della famiglia di funzioni $\{g_h\}_{h>0}$ al tendere di h a zero. La differenziabilità seconda di f in x, e la differenziabilità del gradiente di f, equivalgono al fatto che g_h converga ad un polinomio omogeneo di secondo grado. Utilizzando proprietà elementari delle funzioni convesse, ed il Teorema di copertura di Vitali, si prova che ciò accade per quasi ogni x.

Veniamo ora al secondo tema della tesi: lo studio di proprietà qualitative e quantitative dell'insieme dei punti singolari di funzioni convesse.

Sia f una funzione convessa in un sottoinsieme Ω del piano, aperto e convesso. Diciamo che $x \in \Omega$ è singolare per f, se f non è differenziabile in x e indichiamo con Σ l'insieme dei punti singolari. Abbiamo già osservato che Σ ha misura nulla. La struttura geometrica di Σ può essere descritta con notevole accuratezza, purché si proceda ad una naturale classificazione dei suoi punti, basata sulla dimensione della singolarità. A questo fine è conveniente utilizzare la nozione di *subgradiente*. Ricordiamo che il subgradiente di f in un punto x è definito da

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbf{R}^2 \colon f(y) \geq f(x) + \langle y - x, v \rangle, \ \forall y \in \Omega\} \subset \mathbf{R}^2 \tag{1}$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare usuale). L'insieme $\partial f(x)$ è chiuso, non vuoto e convesso per ogni x, ed è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei versori normali ai piani di supporto al grafico di f in $(x, f(x))$. In particolare la sua dimensione è ben definita. Introduciamo per $i = 1, 2$, l'insieme dei punti singolari di ordine i di f:

$$\Sigma_i = \{x \in \Omega : \dim(\partial f(x)) = i\} . \tag{2}$$

Si possono caratterizzare gli insiemi Σ_i in modo geometricamente più intuitivo. Si ha, ad esempio, che, indicato con Γ_f il grafico di f, $x \in \Sigma_1$ se e solo se il cono tangente a Γ_f in $(x, f(x))$ contiene una e una sola retta; analogamente $x \in \Sigma_2$ se e solo se il cono normale a Γ_f in $(x, f(x))$ ha punti interni.

Veniamo ora alla descrizione geometrica degli insiemi Σ_i. Si prova facilmente che Σ_2 è numerabile. Un risultato analogo per Σ_1 afferma che esiste una famiglia numerabile di curve di classe C^2, la cui unione ricopre Σ_1 a meno di un sottoinsieme di misura unidimensionale (di Hausdorff) nulla. Per la dimostrazione di questo risultato si vedano gli articoli di Anzellotti e Ossanna [3] e Zajiček [9]. Per una più dettagliata bibliografia dei numerosi lavori riguardanti lo studio dell'insieme Σ_1, rimandiamo a [7].

Nella tesi viene fatta un'analisi locale della struttura di Σ_1, attraverso la quale si arriva ad una costruzione esplicita di una famiglia numerabile di curve che ricopre Σ_1 stesso. Si prova che ciascuna di queste curve ha le stesse proprietà di regolarità del grafico di una funzione convessa. L'insieme di questi risultati è contenuto nel seguente enunciato:

TEOREMA 2. – *Sia f una funzione convessa in un sottoinsieme Ω del piano, aperto e convesso. Esiste una famiglia numerabile $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ di curve lipschitziane la cui unione contiene Σ_1. Inoltre ciascuna curva γ_i verifica le seguenti proprietà:*

a. *γ_i è dotata di direzioni tangenti destra e sinistra in ogni punto, tali direzioni coincidono ovunque eccettuato un insieme numerabile di punti;*

b. *sia $x = x(s)$ una parametrizzazione di γ_i rispetto all'ascissa curvilinea, e sia $x'(s)$ il versore tangente destro di γ_i nel punto $x(s)$. Le componenti di $x'(s)$ rispetto ad un riferimento cartesiano, hanno variazione limitata rispetto a s; in particolare γ_i è differenziabile due volte quasi ovunque rispetto a s.*

Mediante opportuni esempi, presentati nella tesi, si prova come il precedente teorema non possa essere migliorato.

Dal Teorema 2 segue in particolare che Σ_1 ha dimensione (di Hausdorff) minore o uguale a uno. Si possono trovare esempi di funzioni convesse, definite in insiemi convessi e limitati, per cui Σ_1 ha dimensione uguale ad uno e misura unidimensionale infinita. Non si può dunque sperare di ottenere maggiorazioni *a priori* per la lunghezza di Σ_1. D'altra parte si possono effettuare delle misure *con peso* dell'insieme Σ_1, in cui il peso assegnato ad un punto x è la misura della singolarità di f in x, ovvero la misura di $\partial f(x)$. In altre parole consideriamo l'integrale:

$$\int_{\Sigma_1} \mathcal{H}^1(\partial(f(x)))\, d\mathcal{H}^1(x)\,, \tag{3}$$

dove $\mathcal{H}^1$ indica la misura di Hausdorff unidimensionale. Una maggiorazione a priori per la quantità (3) è stata dimostrata da Alberti, Ambrosio e Cannarsa in [1], nell'ulteriore ipotesi che f sia lipschitziana in Ω. Tale maggiorazione dipende dal diametro di Ω e dalla costante di Lipschitz di f.

Nella tesi viene provata una maggiorazione ottimale, contenuta nel seguente

TEOREMA 3. – *Sia f convessa e lipschitziana in un sottoinsieme aperto, convesso e limitato Ω di $\mathbf{R}^2$. Allora vale*

$$\int_{\Sigma_1} \mathcal{H}^1(\partial(f(x)))\, d\mathcal{H}^1(x) \leq 2\, \bar{s}(\Omega)\, L\,, \tag{4}$$

dove $\bar{s}(\Omega)$ indica lo spessore medio di Ω e L la costante di Lipschitz di f in Ω.

Inoltre, fissati comunque un sottoinsieme aperto e convesso Ω del piano e $L > 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione f convessa e lipschitziana in Ω, con costante di Lipschitz L, tale che

$$\int_{\Sigma_1} \mathcal{H}^1(\partial(f(x)))\, d\mathcal{H}^1(x) \geq 2\, \bar{s}(\Omega)\, L - \varepsilon\,. \tag{5}$$

Ricordiamo che lo spessore medio di Ω si definisce nel modo seguente. Data una direzione u del piano si indica con $d(u)$ la distanza tra le due rette di supporto ad Ω, ortogonali a u; $\bar{s}(\Omega)$ è la media della funzione $d(u)$ sul cerchio unitario.

La dimostrazione del Teorema 3 è basata su una *formula di Steiner* per funzioni convesse, che viene introdotta e provata nella tesi. Per spiegare il significato di tale formula, partiamo dal suo analogo per gli insiemi convessi, ovvero la formula di Steiner classica. Sia Ω un insieme convesso limitato nel piano, consideriamo l'insieme Ω_ϱ che si ottiene espandendo Ω lungo le normali esterne alla sua frontiera, per una lunghezza $\varrho > 0$. La formula di Steiner afferma che l'area di Ω_ϱ è un polinomio di secondo grado nella variabile ϱ, i cui coefficienti sono quantità geometriche dipendenti da Ω: l'area, lo spessore medio e il perimetro.

Analogamente, se f è una funzione convessa, si può considerare un'espansione del suo dominio Ω di una quantità ϱ, lungo le direzioni del gradiente, o più in generale del subgradiente, di f. Si ottiene così un nuovo insieme la cui area è un polinomio di secondo grado, ed i coefficienti dipendono da f e da Ω. In particolare il coefficiente del termine di grado zero è l'area di Ω; i coefficienti dei termini di primo e secondo grado sono, nel caso in cui f sia di classe C^2, gli integrali estesi ad Ω della traccia e del determinante della matrice hessiana di f, rispettivamente. Dunque la formula di Steiner per funzioni, consente di estendere al caso di funzioni convesse non regolari, la nozione di integrali delle funzioni simmetriche elementari degli autovalori della matrice hessiana.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBERTI G., AMBROSIO L. and CANNARSA P., *On the singularities of convex functions*, Manuscr. Math., **76** (1992), 421-435.

[2] ALEKSANDROV A.D., *Almost everywhere existence of the second differential of a convex function* (in russo) Uchenye Zapinsky Leningrad Gos. Univ. Mat. Ser., **37** (1939), 3-35.

[3] ANZELLOTTI G. and OSSANNA E., *Singular sets of convex bodies and surfaces with generalized curvature*, Manus. Math., **86** (1995), 417-433.

[4] BIANCHI G., COLESANTI A. and PUCCI C., *On the second differentiability of convex surfaces*, Geom. Ded., **60** (1996), 39-48.

[5] BUSEMANN H. and FELLER W., *Krümmungseigenshaften convexer Flächen*, Acta Math., **66** (1935), 1-47.

[6] COLESANTI A., *A Steiner Type formula for convex functions*, Mathematika, **44** (1997), 195-214.

[7] COLESANTI A. and PUCCI C., *Qualitative and quantitative results for sets of singular points of convex bodies*, Forum Math., **9** (1997), 103-125.

[8] COLESANTI A. and HUG D., *Steiner type formulas and weighted measures of singularities for semiconvex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. (in corso di stampa).

[9] ZAJIČEK L., *On the differentiation of convex functions in finite and infinite dimensional spaces*, Czech. Math. J., **29** (1979), 340-348.

Dipartimento di Matematica, Università di Firenze
Dottorato in Matematica (sede del dottorato: Firenze) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Carlo Pucci