Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Ornella Arcudi

Tecniche di martingala e di rappresentazione di Skorohod per approssimazioni di filtri non lineari e di speranze condizionate

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 77–80.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_77_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 77-80

Tecniche di martingala e di rappresentazione di Skorohod per approssimazioni di filtri non lineari e di speranze condizionate.

ORNELLA ARCUDI

Premettiamo che in questa nota si è scelto di presentare la tesi non come un prodotto finito e definito, ma piuttosto attraverso il suo sviluppo cronologico e logico, per dare rilevanza al percorso compiuto e ai possibili sviluppi. Si tralascia, per ragioni di spazio, di definire rigorosamente sia gli strumenti matematici alla base delle dimostrazioni sia alcuni concetti su cui si fonda la ricerca, che saranno virgolettati per evidenziarli, per i quali si rinvia al testo originale.

L'obiettivo iniziale della tesi è ottenere, nell'ambito del filtraggio non lineare a tempo continuo, risultati di convergenza debole di filtri per modelli in cui la coppia di processi (X, Y) (segnale, osservazione) possa essere caratterizzata come l'unica soluzione di un «problema di martingala» nel senso di Stroock e Varadhan. A tale scopo, si vuole sfruttare un risultato di Kurtz e Ocone ([5]), secondo il quale, se si è nella situazione descritta e se $\pi = \{\pi_t\}_t$ è il processo (a valori in uno spazio di leggi) che risolve il problema del filtraggio relativo alla coppia (X, Y), allora la coppia (π, Y) può essere caratterizzata, a sua volta, come l'unica soluzione di un opportuno «problema di martingala filtrata».

Le difficoltà incontrate hanno condotto ad approfondire aspetti collaterali delle rappresentazioni quasi certe di distribuzioni convergenti in legge. In tale contesto, l'analisi di una dimostrazione di Billingsley ([1]) del «teorema di Skorohod» ha permesso di individuare condizioni sufficienti per avere convergenza forte di speranze condizionate alle variabili aleatorie che rappresentano le distribuzioni, potendo così provare il seguente teorema di Skorohod generalizzato (capitolo 2), ove la seconda parte dell'enunciato ne costituisce il risultato nuovo.

TEOREMA 1. – *Se P_n converge debolmente a P, dove $P, P_n, n = 1, 2, \ldots$ sono misure di probabilità su uno spazio metrico, separabile, completo $(S, \mathcal{S})$, esistono, sullo spazio di probabilità $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathcal{L})$ elementi aleatori $X, X_n, n = 1, 2, \ldots$, aventi distribuzioni rispettive $P, P_n, n = 1, 2, \ldots$, tali che $\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\ \forall\omega$.*

Se, inoltre, vale:

$$\lim_n \sup_k \sum_{A_{ku} \in \mathcal{A}_k} |P_n(A_{ku}) - P(A_{ku})| = 0 \tag{1}$$

per qualche sequenza di partizioni $\{\mathcal{A}_k\}_k$ di S, tale che $\forall k$ gli A_{ku} sono insiemi di P-continuità aventi diametro minore di $1/k$ e $\mathcal{A}_{k+1}$ è un raffinamento di $\mathcal{A}_k$; allora, per ogni variabile aleatoria Z di quadrato integrabile su

$([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{L})$, *si ha:*

$$E[Z \mid X_n] \; @>L^2>> E[Z \mid X].$$

Viene mostrato che la convergenza in variazione totale è sufficiente per la validità di (1) e viene fornito un esempio negativo in cui P è concentrata su un atomo. Si sono poi formulate condizioni equivalenti ad (1) (capitolo 3) e studiate le diverse rappresentazioni di Skorohod rispetto al comportamento asintotico delle sigma-algebre generate (capitoli 4, 5).

In quest'ultimo contesto, in particolare si sono analizzati i casi di rappresentazioni di Skorohod sullo spazio delle martingale rumore (capitolo 8); riportiamo brevemente tale analisi in quanto segue. Studi analoghi di convergenza di filtri sono stati recentemente svolti da Goggin ([3], [4]) attraverso l'uso di tecniche completamente differenti.

Si considera il seguente sistema di EDS:

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))\,dt + dV(t) \\ dY(t) = g(t, X(t))\,dt + dW(t) \end{cases}$$

dove V e W sono moti Browniani di varianze rispettive $s^2 t$ e $b^2 t$, e una successione $\{(X^N, Y^N)\}_N$ di processi discreti,

$$\begin{cases} \Delta X^N(n\Delta) = f(n\Delta, X^N(n\Delta))\,\Delta + \Delta V^N(n\Delta) \\ \Delta Y^N(n\Delta) = g(n\Delta, X^N(n\Delta))\,\Delta + \Delta W^N(n\Delta), \end{cases}$$

dove $\Delta = T/N$, $\Delta V^N(n\Delta) = s\sqrt{\Delta}\,\xi_n^N$, $\Delta W^N(n\Delta) = b\sqrt{\Delta}\,\theta_n^N$, $\{\xi_n^N\}_{0 \le n \le N-1}$ e $\{\theta_n^N\}_{0 \le n \le N-1}$ essendo variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite con densità rispettive h_N e p_N. Viene provato, per diverse densità (h_N, p_N) convergenti ad una Gaussiana (essenzialmente troncata, arrotondata, sia troncata sia arrotondata, ma sembra possibile generalizzare ad altre densità purchè asintoticamente «vicine» alla Gaussiana), che esistono versioni $(\widehat{X}^N, \widehat{Y}^N)$ sullo spazio $(\Omega^V \times \Omega^W)$ con sigma-algebra e misura prodotto canoniche, soddisfacenti

$$\forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \forall t \in [0, T], \qquad E[\phi(\widehat{X}_t^N, \widehat{Y}_t^N) \mid \mathcal{F}_t^{\widehat{Y}^N}] \; @>L^2>> E[\phi(X_t, Y_t) \mid \mathcal{F}_t^Y],$$

il che implica la convergenza debole dei filtri, qualunque versione se ne scelga. Per densità (h_N, p_N) generali, invece, tale convergenza non sussiste, come conferma il fatto che l'informazione generata da $\widehat{Y}^N$ «converge» ad una strettamente più «grande» di quella generata da Y.

L'obiettivo iniziale è raggiunto con la formulazione di due criteri di convergenza, l'uno più particolare (capitolo 6) perchè concernente modelli che presentano equivalenza nelle osservazioni approssimate, e l'altro più generale (capitolo 7), dei quali si forniscono alcuni esempi di applicazione. Tali due teoremi sono riportati nella seguente sezione di questa nota, che nel contempo la conclude.

TEOREMA 2. – *Si assume*:

(A1) *siano* $E_1, E_2, E = E_1 \times E_2$ $E_n^i \in \mathcal{B}(E_i)$, $i = 1, 2$, $E_n = E_n^1 \times E_n^2$ *spazi euclidei finito-dimensionali, completi*, $E_n \subseteq E_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\cup_n E_n$ *densa in* E;

(A2) *su* $(\Omega, \mathcal{F}, Q), (\Omega^n, \mathcal{F}^n, Q^n)$ *siano* $(X, Y), (X_n, Y_n)$, *a valori in* E, E_n, *con distribuzioni* P, P_n, *soluzioni del «problema di martingala" per* A, A_n, *rispettivamente, per* $n = 1, 2, \ldots$, *tali che* $\mathcal{L}(X_n(0), Y_n(0)) = \mathcal{L}(X(0), Y(0))$ $\forall n$ *e gli* A_n *«convergano uniformemente» ad* A;

(A3) *la successione* $\{\pi_{.}^n f\}_n$ *sia «relativamente debolmente compatta»* $\forall f \in \mathcal{D}(A)$;

(A4) *le distribuzioni marginali* P^Y, P_n^Y *di* P, P_n, *soddisfino* $\forall n$ $P^Y \sim P_n^Y$, *e, posto* $L_n = dP^Y/dP_n^Y$, *si abbia* $\lim_n L_n = 1$ P^Y*-q.c.*

Allora i processi-filtro π^n *convergono in legge al processo-filtro* π.

Esempio di applicazione è un generico modello (X, Y) di Markov, in cui X viene approssimato da processi markoviani X_n a stati numerabili e Y_n è funzionalmente uguale ad Y.

TEOREMA 3. – *Dal teorema* 2 *si assumono* (A1), (A2), (A3) *e* (A4) *è sostituita dalla seguente*:

(A4) esistano versioni $(\widehat{X}, \widehat{Y}), (\widehat{X}_n, \widehat{Y}_n)$ *di* $(X, Y), (X_n, Y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *su uno spazio di probabilità* $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$, *tali che*:

(A4.1) *la trasformazione misurabile* $S_n \colon \mathcal{F}^n \to \widehat{\mathcal{F}}$ *sia un isomorfismo di sottofiltrazioni in quanto* $S_n^{-1}(\mathcal{F}_t^{\widehat{Y}_n}) \subset \mathcal{F}_t^{Y_n}$ $\forall t \leq T$, $\forall n$;

(A4.2) *se* $\{\pi_{.}^m f\}$ *converge debolmente a un qualche* $\mu_{.} f$, *la versione* $\widehat{\mu}_{.} f$ *sia adattata a* $\{\mathcal{F}_t^{\widehat{Y}}\}_t$.

Allora i processi-filtro π^n *convergono in legge al processo-filtro* π.

Si portano due esempi naturali in cui le approssimazioni dei modelli sono dovute essenzialmente ad arrotondamento. Un altro esempio ([2]) è una coppia di Markov (X, Y) a valori numerabili, i cui approssimanti markoviani (X_n, Y_n) sono ottenuti sostanzialmente guardando (X, Y) solo quando si trova in restrizioni J_n dello spazio degli stati, mentre i rimanenti tempi sono «cancellati» dall'asse temporale che è poi «incollato» per formare una linea continua.

BIBLIOGRAFIA

[1] BILLINGSLEY P., *Weak convergence of measures*, CBMS-NSF (Regional Conference Series in Applied Mathematics), **5** (1971).

[2] FREEDMAN D., *Approximating countable Markov chains*, Holden Day Series in Probability and Statistics, Lehmann ed. (1971).

[3] GOGGIN E., *Convergence of filters with applications to the Kalman-Bucy case*, IEEE Trans. on Inf. Theory, **38 n. 3** (1992), 1091-1100.

[4] GOGGIN E., *Convergence in distribution of conditional expectations*, Annals of Prob., **22** (1994), 1097-1114.

[5] KURTZ T. G. and OCONE D., *Unique characterization of conditional distributions in nonlinear filtering*, Ann. of Prob., **16** (1988), 80-107.

Università degli Studi di Padova, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Dottorato in Matematica Computazionale e Informatica Matematica
(sede amministrativa: Padova) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Giovanni B. Di Masi
Correlatore Prof. Federico Marchetti