Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Fabrizio Ponza

Sezioni Wronskiane Generalizzate e famiglie di punti di Weierstrass

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 59–62.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_59_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 59-62

Sezioni Wronskiane Generalizzate e famiglie di punti di Weierstrass.

FABRIZIO PONZA

Questa tesi costituisce l'inizio di un programma volto all'elaborazione di una teoria di quelle che sono state chiamate nell'esposizione *Sezioni Wronskiane Generalizzate* (nel seguito SWG) su una curva algebrica complessa C liscia e connessa, di genere g, (che chiameremo semplicemente curva liscia) o su una famiglia $\pi\colon \mathcal{X} \to S$ piatta e propria di curve lisce di genere g. Le SWG risultano essere sezioni globali di certi fibrati vettoriali definiti su una curva liscia o sullo spazio totale $\mathcal{X}$ di una famiglia π, che sono stati denominati *Fibrati Wronskiani Generalizzati* (FWG). Nella tesi si sono inoltre mostrate le prime applicazioni di queste costruzioni al calcolo in M_g, lo spazio dei moduli delle curve lisce di genere g, di classi di Chow di luoghi corrispondenti a curve aventi punti di Weierstrass di tipo speciale. Proprio la ricerca di metodi per calcolare classi di Chow di luoghi del tipo detto è stata la principale motivazione che ha portato a definire ed a studiare le SWG.

Per inquadrare il problema, ricordiamo che se C è una curva liscia e $\mathcal{K}_C$ è il suo fibrato canonico, si può definire una sezione globale del fibrato $\mathcal{K}_C^{\otimes N}$, dove $N = g(g+1)/2$, la classica sezione Wronskiana, localmente descritta su un aperto trivializzante U_a dal determinante W_a della matrice $g \times g$ avente come i-esima riga $u_{1a}^{(i)}, \ldots, u_{ga}^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, g-1$, dove $\underline{u} = (u_{1a}, \ldots, u_{ga})$ è una g-upla di funzioni regolari su U_a che rappresenta una base $\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_g)$ di $H^0(C, \mathcal{K}_C)$ e $u_{ja}^{(i)}$ è la derivata i-esima di u_{ja} rispetto ad un parametro locale su U_a.

Questo determinante si può scrivere come

$$W_a = \underline{u}_a \wedge \ldots \wedge \underline{u}_a^{(g-1)}.$$

La sezione si scrive allora simbolicamente come

$$W_C = \underline{\omega} \wedge \ldots \wedge D^{g-1}\underline{\omega} = \{(U_a; W_a)\},$$

intendendo con ciò che, su ogni aperto trivializzante U_a, $W_{C|U_a}$ è rappresentato da W_a. I punti di Weierstrass sono, per definizione, gli zeri della sezione W_C. L'ordine di annullamento di W_C in P è il peso di P, $w(P)$. I punti di Weierstrass di tipo speciale sono i punti di peso strettamente maggiore di 1. L'espressione $\underline{u}_a \wedge \ldots \wedge \underline{u}_a^{(g-1)}$ può derivarsi successivamente, e la collezione

$$\{(U_a; W_a, (W_a)', \ldots (W_a)^{(k-1)})\}$$

definisce una sezione globale $D^k W_C$ del fibrato dei k-jets $J^{k-1}(\mathcal{K}_C^{\otimes N})$. È noto che P è un punto di Weierstrass di peso almeno k se e solo se è zero della sezione

$D^k W_C$, che chiamiamo la *Derivata k-esima del Wronskiano*. Osserviamo che si ha

$$(W_\alpha)' = \underline{u}_\alpha \wedge \ldots \underline{u}_\alpha^{(g-2)} \wedge \underline{u}_\alpha^{(g)}$$

e

$$(W_\alpha)'' = \underline{u}_\alpha \wedge \ldots \underline{u}_\alpha^{(g-2)} \wedge \underline{u}_\alpha^{(g+1)} + \underline{u}_\alpha \wedge \ldots \underline{u}_\alpha^{(g-3)} \wedge \underline{u}_\alpha^{(g-1)} \wedge \underline{u}_\alpha^{(g)}.$$

Questo suggerisce la scrittura formale

$$D(\underline{\omega} \wedge \ldots \wedge D^{g-1}\underline{\omega}) = \underline{\omega} \wedge \ldots \wedge D^{g-2}\underline{\omega} \wedge D^g \underline{\omega}$$

che si deve intendere in questo modo: l'espressione $\underline{u}_\alpha \wedge \ldots \underline{u}_\alpha^{(g-2)} \wedge \underline{u}_\alpha^{(g)}$ si trasforma per cambi di carte secondo una coppia di funzioni, che rappresenta su ogni U_α una sezione di $J^1(\mathcal{K}_C^N)$ coincidente con la derivata del wronskiano $D(\underline{\omega} \wedge \ldots \wedge D^{g-1}\underline{\omega})$. Nel caso della derivata seconda, la scrittura formale ottenuta iterando il simbolo D, diviene:

$$D^2(\underline{\omega} \wedge \ldots \wedge D^{g-1}\underline{\omega}) = \underline{\omega} \wedge \ldots \wedge D^{g-2}\underline{\omega} \wedge D^{g+1}\underline{\omega} + \underline{\omega} \wedge \ldots \wedge D^{g-1}\underline{\omega} \wedge D^g \underline{\omega},$$

ma ora l'interpretazione non è più immediata. In particolare, si vorrebbero interpretare le espressioni a secondo membro come sezioni di un qualche fibrato, e la somma come un modo per indicare la sezione a secondo membro. Si avranno in generale decomposizioni monomiali a coefficienti interi, del tipo

$$D^k(\underline{\omega} \wedge \ldots \wedge D^{g-1}\underline{\omega}) = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_g} c_{i_1 \ldots i_g} D^{i_1}\underline{\omega} \wedge \ldots \wedge D^{i_g}\underline{\omega},$$

il cui significato non è affatto ovvio. La risposta a questa questione si può sintetizzare nel seguente modo:

TEOREMA 1. – *Sia C una curva liscia, $\mathcal{L}$ un fibrato in rette su C tale che* dim $H^0(C, \mathcal{K}_C) > 0$, *e $V \subset H^0(C, \mathcal{K}_C)$ un sistema lineare di dimensione r. Si scelga una base $\underline{\lambda}$ di V, rappresentata sull'aperto U_α dalla r-upla di funzioni regolari $\underline{u}_\alpha$. Fissato un multiindicestrettamente crescente $A = (a_1, \ldots, a_r)$, con $0 \leq a_1 < \ldots < a_r$, si definisca il determinante*

$$\underline{u}_\alpha^A = \underline{u}^{(a_1)} \wedge \ldots \wedge \underline{u}^{(a_r)}.$$

Allora la collezione di tutte le funzioni $(\underline{u}_\alpha^B)_{B \leq A}$, ottenuta dando l' ordinamento parziale ovvio tra multiindici del tipo detto, si trasforma per cambi di carte come sezione di un certo fibrato vettoriale.

Possiamo allora dare la definizione seguente:

DEFINIZIONE 1. – *Il fibrato costruito nel teorema precedente si denota come $\mathcal{W}^A \mathcal{L}$ e si denomina Fibrato Wronskiano Generalizzato. La sezione ottenuta si indicherà con la notazione*

$$D^A \underline{\lambda} = D^{a_1}\underline{\lambda} \wedge \ldots \wedge D^{a_r}\underline{\lambda}$$

e verrà detta Sezione Wronskiana Generalizzata.

Osserviamo che il fibrato ottenuto e il luogo degli zeri della rispettiva sezione non dipendono dalla scelta della base nè dalla sua rappresentazione locale. La dimostrazione del teorema è naturale, perchè basata su una serie di incollamenti di dati locali, ma piuttosto pesante. In questo modo ogni espressione formale che compare nella decomposizione monomiale delle derivate del Wronskiano si interpreta come una certa SWG, e l'intera somma risulta un simbolo per indicare le derivate stesse. Inoltre il teorema produce sezioni che non sono riconducibili a sezioni di qualche fibrato dei jets. Tutto ciò vale anche in famiglie, generalizzando il Wronskiano relativo introdotto in [2] come morfismo di fibrati su $\mathcal{X}$:

$$W_\pi : \pi^* \bigwedge^{g} \pi_* \mathcal{K}_\pi \to \mathcal{K}_\pi^{\otimes N}$$

Qui $\mathcal{K}_\pi$ è il fibrato canonico relativo. Abbiamo quindi il seguente risultato (che riportiamo senza specificare tutti i dettagli):

TEOREMA 2. – *Sia $\pi : \mathcal{X} \to S$ una famiglia piatta e propria di curve lisce di genere g (più in generale curve stabili di genere aritmetico g), $\mathcal{L}$ un fibrato in rette su $\mathcal{X}$ e $\mathcal{V}$ un sottofibrato vettoriale di rango r del fibrato $\pi_* \mathcal{L}$ su S. Le Sezioni Wronskiane Generalizzate relative sono, per definizione, morfismi*

$$\pi^* \bigwedge^{r} \mathcal{V} \to \mathcal{D}_\pi^A \mathcal{L},$$

essendo i $\mathcal{D}_\pi^A \mathcal{L}$ fibrati analoghi ai FWG, costruiti lungo le fibre di π.

Per ciò che riguarda le applicazioni, il caso di immediato interesse si ha considerando $\mathcal{L} = \mathcal{K}_\pi$, $\mathcal{V} = \pi_* \mathcal{K}_\pi$ e $A = (0, 1, \dots, g-1)$:

$$D^k W_\pi : \pi^* \bigwedge^{g} \pi_* \mathcal{K}_\pi \to J^k(\mathcal{K}_\pi^{\otimes N}).$$

Intuitivamente, questi morfismi sono ottenuti incollando lungo le fibre di π le derivate del wronskiano costruito sulle fibre stesse. Fibra per fibra, le derivate del wronskiano hanno zeri nei punti di Weierstrass di peso almeno k, e quindi lo schema di degenerazione $Z(D^k W_\pi)$ del morfismo $D^k W_\pi$ è supportato dai punti che sono di Weierstrass di peso almeno k sulla fibra a cui appartengono. Per ogni famiglia π si può quindi dare la definizione seguente:

DEFINIZIONE 2. – *Le Derivate del Wronskiano relativo (alla famiglia π) sono i morfismi $D^k W_\pi$ (ovvero sezioni $D^k W_\pi \in H^0(\mathcal{X}, J^k(\mathcal{K}_\pi^N) \otimes (\pi^* \wedge \pi_* \mathcal{K}_\pi)^\vee)$). Il luogo dei punti di S sulla cui fibra c'è un punto di Weierstrass di peso almeno k è definito nella seguente maniera:*

$$wt(k) = \pi(Z(D^k W_\pi))$$

come schema.

Questo luogo, anche se molto naturale dal punto di vista geometrico, non sembra aver ricevuto serie attenzioni da parte della letteratura. Il fatto è che esso è ora ben definito come schema, solo grazie alle derivate del Wronskiano relativo. I risultati geometricamente più significativi riguardano la codimensione di $wt(k)$, e quindi la possibilità di calcolare la classe di $wt(k)$ nel corrispondente gruppo di Chow. Si ha

TEOREMA 3. – *Il luogo* $wt(2)$ *ha componenti irriducibili di codimensione attesa* 1 *per ogni* $g \geqslant 3$.

Questo risultato era già contenuto implicitamente in [1]. Non risulta invece noto l'analogo per $wt(3)$:

TEOREMA 4. – *Ogni componente irriducibile di* $wt(3)$ *ha codimensione attesa* 2, *per* $g \geqslant 4$.

Conseguentemente, si può calcolare una classe *di codimensione* 2:

$$[wt(3)] = \frac{1}{8} g(g+1)(g^2+g+2)(g^2+g+4)\kappa_2 - \frac{1}{4}(3g^4+6g^3+15g^2+12g+8)\lambda\kappa_1$$

dove, per la definizione delle classi λ e κ si rimanda per esempio a [1].

Concludiamo con qualche osservazione sul molto lavoro che rimarrebbe da fare, limitandoci ad accennare all'aspetto più immediato ed a quello più complesso.

Da una parte, una cosa molto naturale da fare è la seguente: dato $k \geqslant 3$, trovare $g(k)$ tale che le componenti irriducibili di $wt(k)$ abbiano codimensione attesa per ogni $g \geqslant g(k)$. Da risultati generali di Einsenbud ed Harris, $wt(k)$ ha componenti irriducibili di codimensione attesa $k-1$ almeno per $g \geqslant 2k$, ma dai teoremi 2 e 3 si ha che tale stima può essere migliorata. In questo modo si potrebbe calcolare un certo numero di classi in codimensione alta di luoghi geometricamente significativi.

Molto più in generale, il problema riguarda le applicazioni per le SWG non riconducibili a derivate del wronskiano. Infatti tali sezioni descrivono ancora luoghi di punti di Weierstrass di tipo speciale, ma non nella codimensione giusta. Ad esempio, la SWG $\underline{\omega} \wedge D\underline{\omega} \wedge D^4\underline{\omega}$ descrive il luogo dei punti iperellittici in una famiglia unidimensionale generale di curve lisce di genere 3, ma in codimensione 3. Ciò che ci si può aspettare è che occorra epurare questi eccessi di intersezione con tecniche di teoria dell'Intersezione.

BIBLIOGRAFIA

[1] CUKIERMAN F., *Families of Weierstrass points,* Duke Math. J., 58 (1989), 317-346.
[2] LAKSOV D. and THORUP A., *Weierstrass points and gap sequences for families of curves,* Ark. Math., 32 (1994), 393-422.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino
e-mail:ponza@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Torino) - Ciclo VII
Direttore di ricerca: Prof. Silvio Greco