Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Petar Pavešić

Gruppi di autoequivalenze omotopiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 55–58.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_55_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 55-58

Gruppi di autoequivalenze omotopiche.

Petar Pavešić

1. – Introduzione.

Per ogni spazio topologico puntato X si considera l'insieme Aut (X) di classi di omotopia di mappe puntate di X in sé che sono equivalenze di omotopia. La composizione di mappe induce su Aut (X) una struttura di gruppo, detto *gruppo di autoequivalenze omotopiche* di X. Questo gruppo è stato intensamente studiato negli ultimi 40 anni (vedi i lavori riassuntivi [2] e [8]) e molti sviluppi sono ancora in corso.

Nella tesi sono esposti contributi a tre aree diverse: studio del gruppo di autoequivalenze mediante le successioni spettrali; descrizione del gruppo di autoeqivalenze del prodotto di due spazi; studio del gruppo di autoequivalenze degli spazi universali associati alle operazioni coomologiche secondarie.

Tutti gli spazi considerati hanno il tipo di omotopia di CW complessi e sono puntati; gli insiemi di funzioni continue tra spazi topologici sono sempre provvisti della topologia compatto-aperta. Oggetti principali dello studio sono aut (X), lo spazio di automappe di X, che sono equivalenze di omotopia; $\mathrm{aut}_*(X)$, il sottospazio di aut (X) di mappe che inducono identità sui gruppi di omologia integrali; $\mathrm{aut}_{\#n}(X)$ il sottospazio di aut (X) di mappe che inducono identità sui gruppi di omotopia fino alla dimensione n (definito per $0 < n \leqslant \infty$). Passando alle classi di omotopia si ottengono i gruppi corrispondenti: $\mathrm{Aut}(X) := \pi_0(\mathrm{aut}(X))$, $\mathrm{Aut}_*(X) := \pi_0(\mathrm{aut}_*(X))$ e $\mathrm{Aut}_{\#n}(X) := \pi_0(\mathrm{aut}_{\#n}(X))$.

La tesi ha una sezione introduttiva nella quale si dà una breve esposizione dei risultati e metodi della topologia algebrica usati nel lavoro come pure di alcune nozioni sui gruppi di autoequivalenze.

2. – Successioni spettrali per gruppi di autoequivalenze.

In questo capitolo si estendono i risultati di W. Shih [9] e di G. Didierjean [4] sulla costruzione di successioni spettrali che servono per determinare vari gruppi di autoequivalenze omotopiche. Il loro approccio è basato sulla decomposizione di Postnikov di uno spazio, per cui sono difficili da usare per calcoli espliciti. La difficoltà dell'approccio duale, mediante la decomposizione per schelettri è che questa non è naturale. In effetti, si può dimostrare che una decomposizione per schelettri in genere non induce una serie normale di sottogruppi di Aut (X), per cui non è possibile ottenere una successione spettrale.

La prima parte del capitolo è dedicata alla successione spettrale per $\mathrm{Aut}_{\#}(X)$ della Didierjean. Se ne da una breve dimostrazione (per rendere più comprensibile il caso duale) e la si usa per dare una dimostrazione alternativa del risultato di Maruyama [6], che l'omomorfismo naturale $\mathrm{Aut}_{\#n}(X) \to \mathrm{Aut}_{\#n}(X_{(P)})$ è una P-localizzazione per ogni dim $X \leqslant n < \infty$. Si da anche una risposta parziale al problema del caso rimamente del teorema di Maruyama per $n = \infty$ costruendo uno spazio X, di dimensione infinita, per il quale $\mathrm{Aut}_{\#\infty}(X) \rightarrow \mathrm{Aut}_{\#\infty}(X_{(0)})$ non è una razionalizzazione. Si considera infine anche la fibra omotopica della mappa $L_f \mathrm{aut}\,(X) \rightarrow \mathrm{aut}\,(L_f X)$, dove L_f è la localizzazione rispetto alla mappa f nel senso di Dror-Farjoun [5]. Si dimostra che $\mathrm{aut}_1(L_f X) \simeq L_f(\mathrm{aut}_1 X)$ quando L_f è una p-localizzazione o una sezione di Postnikov.

Nel resto del capitolo si studia l'effetto della decomposizione per schellettri su $\mathrm{Aut}_*(X)$. Come primo si dimostra che la decomposizione per schelettri induce una serie normale di sottogruppi di $\mathrm{Aut}_*(X)$. Questo risultato è cruciale per il secondo passo, la costruzione della successione spettrale convergente a $\mathrm{Aut}_*(X)$. A questo scopo si sviluppa una variante dei cosidetti sistemi di Cartan e Eilenberg. Quando X è un CW-complesso 1-connesso, con la decomposizione per schelettri $\{X^{(p)}\}$, dove $X^{(p+1)}$ è il cono della mappa $\varphi_p \colon V^p = V_r^p \vee V_g^p \rightarrow X^{(p)}$, allora il termine iniziale della successione spettrale è dato da

$$E_1^{p,\,-1-p} = \pi_{p+2}(X^{(p+1)})^{c_{p+1}} \qquad E_1^{p,\,-p} = \pi_{p+1}(X^{(p+1)})^{r_{p+1}} \oplus (\mathrm{Ker}\; h_{p+1})^{g_{p+1}}$$

$$E_1^{p,\,1-p} = \pi_p(X^{(p)})^{c_{p+1}} / [V_r^p,\, V_g^p]\,,$$

dove $h_{p+1} \pi_{p+1}(X) \rightarrow H_{p+1}(X)$ è l'omomorfismo di Hurewicz. Alternativamente, usando la decomposizione omologica $\{X_p\}$ di X, si ottiene una successione simile con

$$E_1^{p,\,q} = \pi_{1-q}(H_{p+1}(X);\, X_p)$$

per $p > 0$ e $p + q \in \{-1, 0, 1\}$. Le due successioni sono convergenti per ragioni di dimensione ma in generale il termine E_∞ non corrisponde ai subquozienti della filtrazione di $\mathrm{Aut}_*(X)$. Analizzando la costruzione si scopre che i subquozienti della filtrazione sono quozienti di sottogruppi di E_∞ e in questo senso la successione spettrale è una maggiorante di $\mathrm{Aut}_*(X)$. Per fortuna, ci sono molti casi interessanti in cui E_∞ corrisponde esattamente alla filtrazione di $\mathrm{Aut}_*(X)$, il più importante dei quali è dato da complessi che non hanno celle in dimensioni successive. In questo caso le due successioni spettrali descritte sopra coincidono e possono espresse in una forma più semplice. Il capitolo si conclude con il calcolo di una serie di esempi.

3. – Autoequivalenze del prodotto di due spazi.

Il capitolo è dedicato allo studio dei gruppi $\mathrm{Aut}\,(X \times Y)$ e $\mathrm{Aut}_\#(X \times Y)$. Nell'introduzione si dà una rassegna dei risultati noti e in particolare del seguente teorema di Booth e Heath [3] che può essere considerato il punto di partenza dello studio. Per CW-complessi connessi X e Y denotiamo con $i_X \colon x \mapsto (x, y_0)$ e $i_Y \colon y \mapsto (x_0, y)$ le inclusioni di X e Y in $X \times Y$ e con p_X, p_Y le proiezioni di $X \times Y$ su X e Y rispettivamente. Assumiamo inoltre che gli spazi X e Y soddisfano le condizioni seguenti: (a) Le autoequivalenze di $X \times Y$ sono *scindibili*, cioè per ogni $f \in \mathrm{aut}\,(X \times Y)$ vale $p_X f i_X \in \mathrm{aut}\,(X)$ e $p_Y f i_Y \in \mathrm{aut}\,(Y)$; (b) $[Y, H(X)] = \{*\}$, dove $H(X)$ è lo spazio di automappe di X liberamente omotope alla mappa identità. Allora Aut $(X \times Y)$ è il prodotto semidiretto di Aut $X \times$ Aut Y con $[X, H(Y)]$. La condizione (b) è particolarmente scomoda sia perchè è difficile da verificare, che per il fatto che è raramente soddisfatta.

Gli spazi X e Y sono *omotopicamente disgiunti* se per ogni $i > 0$ e per ogni coppia di mappe almeno uno degli omomorfismi $f_{\#}: \pi_i X \to \pi_i Y$ e $g_{\#}: \pi_i Y \to \pi_i X$ è banale. Ognuna delle seguenti condizioni implica che X e Y sono omotopicamente disgiunti.: (1) per ogni $i > 0$ almeno uno dei gruppi $\pi_i(X)$ e $\pi_i(Y)$ è banale; (2) per ogni $i > 0$ vale Hom $(\pi_i(X), \pi_i(Y)) = 0$ oppure Hom $(\pi_i(X), \pi_i(Y)) = 0$; (3) X è n-dimensionale e Y è n-connesso; (4) X e Y sono semplicemente connessi, $H_*(X)$ è P-locale mentre $H_*(Y)$ è Q-locale per due insiemi disgiunti P e Q di numeri primi. Si dimostra inoltre che le autoequivalenze del prodotto di due spazi omotopicamente disgiunti sono scindibili. Se X e Y sono omotopicamente disgiunti si ha la successione esatta di insiemi puntati

$$0 \to [Y, H(X)] \times [X, H(Y)] \to \mathrm{Aut}\,(X \times Y) \to \mathrm{Aut}\,(X) \times \mathrm{Aut}\,(Y) \to 0\,.$$

Anche se non determina la struttura di gruppo, questo risultato permette di derivare alcune conseguenze su Aut $(X \times Y)$. Un risultato analogo e in condizioni simili si ottiene anche per $\mathrm{Aut}_{\#}(X \times Y)$.

Per descrivere la struttura algebrica di Aut $(X \times Y)$ si ricordi che un gruppo G è il *prodotto* dei suoi sottogruppi A e B (non neccessariamente normali), se $G = A \cdot B := \{ab \mid a \in A,\, b \in B\}$. Sia $\mathrm{Aut}_X(X \times Y)$ il sottogruppo di Aut $(X \times Y)$ di autoequivalenze che fissano la prima componente. È possibile ottenere una caratterizzazione precisa degli elementi di $\mathrm{Aut}_X(X \times Y)$, il che permette di ottenere il risultato principale di questo capitolo: se X e Y sono omotopicamente disgiunti, allora Aut $(X \times Y)$ è il prodotto di $\mathrm{Aut}_X(X \times Y)$ e $\mathrm{Aut}_Y(X \times Y)$. Qui è importante notare che la struttura dei fattori non è complicata: $\mathrm{Aut}_Y(X \times Y)$ è il prodotto semidiretto di Aut (X) con $[Y, H(X)]$.

Il resto del capitolo è dedicato alle conseguenze di questi risultati, sia strutturali, che usano le proprietà dell'operazione di prodotto per dire quando il gruppo Aut $(X \times Y)$ è nilpotente, meta-abeliano, solubile ecc., che computazionali, dove si ottiene (senza le condizioni che limitavano l'applicabilità dei risultati di Booth, Heath e altri) i gruppi di autoequivalenze per prodotti con sfere, spazi di Moore e spazi di Eilenberg-MacLane. Per trattare casi più complessi si costruisce una successione spettrale convergente verso il gruppo $[X, H(Y)]$ che poi viene usata in alcuni casi interessanti, per esempio H-spazi di rango 2.

4. – Autoequivalenze di operazioni coomologiche secondarie.

In questo capitolo si studiano le autoequivalenze omotopiche degli spazi universali per le operazioni coomologiche secondarie. Sia $K = K(\mathbb{Z}_2, n)$, $\pi = \prod_{i \in \Lambda} K(\mathbb{Z}_2, n+i)$ per un $\Lambda \subseteq \{0, 1, \dots, n-1\}$ e sia $\xi: K \to \pi$ una mappa arbitraria. La fibra omotopica P di ξ è detta *spazio universale*. Ogni operazione coomologica secondaria da $H^n(X; \mathbb{Z}_2)$ in $H^{n+k}(X; \mathbb{Z}_2)$ è definita da una classe coomologica $\varphi \in H^{n+k}(P; \mathbb{Z}_2)$. Per la descrizione dettagliata di questi fatti, vedi [1]. Le autoequivalenze di P agiscono in modo ovvio sulle operazioni coomologiche da $H^n(X; \mathbb{Z}_2)$ in $H^{n+k}(X; \mathbb{Z}_2)$.

I risultati principali di questo capitolo sono la riduzione della determinazione di Aut (P) a calcoli nell'algebra di Steenrod $\mathcal{A}_2$ e il teorema secondo il quale l'insieme delle orbite dell'azione di Aut (P) è esattamente l'insieme delle operazioni coomologiche secondarie da $H^n(X; \mathbb{Z}_2)$ in $H^{n+k}(X; \mathbb{Z}_2)$. Più precisamente, sia D l'$\mathcal{A}_2$-modulo libero graduato generato da un generatore c in dimensione 0, C l'$\mathcal{A}_2$-modulo libero graduato generato da elementi $\{c_i \mid i \in \Lambda\}$ con $|c_i| = i$ e $d\colon C \to D$ l'$\mathcal{A}_2$-morfismo corrispondente alla mappa ξ. Usando il teorema di Nomura [7] si deriva la successione esatta corta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_2}(C^-, D) \to \mathrm{Aut}\,(P) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_2}(C, \ker d) \to 0$$

(C^- è la desospensione di C). Essendo C un modulo libero, i due gruppi di omomorfismi della successione esatta sono facilmente calcolabili.

BIBLIOGRAFIA

[1] ADAMS J.F., *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math., **72** (1960), 20-104.

[2] ARKOWITZ M., *The Group of Self-Homotopy Equivalences - a survey*, Group of Self-Equivalences and Related Topics, LNM 1425 (Springer 1988), 170-203.

[3] BOOTH P. and P. HEATH: *On the groups $\mathcal{E}(X \times Y)$ and $\mathcal{E}_B^B(X \times_B Y)$*, Group of Self-Equivalences and Related Topics, LNM 1425 (Springer 1988), 17-31.

[4] DIDIERJEAN G., *Homotopie de l'espace des équivalences d'homotopie fibrées*, Ann. Inst. Fourier, **35** (1985), 33-47.

[5] DROR-FARJOUN E., Cellular Spaces, Null Spaces and Homotopy Localization, LNM 1622 (Springer 1996).

[6] MARUYAMA K., *Localization of certain subgroup of self-homotopy equivalences*, Pacific J. Math., **136** (1989), 305-315.

[7] NOMURA Y., *Homotopy equivalences in a principal fibre space*, Math. Z., **92** (1966), 380-388.

[8] RUTTER J., Spaces of homotopy self-equivalences, LNM 1662 (Springer 1997).

[9] SHIH W., *On the group $\varepsilon[X]$ of homotopy equivalence maps*, Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), 361-365.

Fakulteta za Matematiko in Fiziko, Univerza v Ljubljani
Jadranska 19, 1111 Ljubljana, Slovenija
e-mail: petar.pavesic@uni-lj.si
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Miliano) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Renzo Piccinini