
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ROMEO RIZZI

Impaccando T -tagli e T giunti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 201–204.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_201_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Impaccando T -tagli e T -giunti.

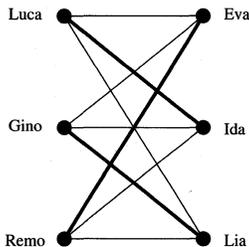
ROMEO RIZZI

La tesi affronta alcuni problemi in teoria dei grafi. Un elenco dei risultati è posto in appendice. Ci soffermiamo ora su due temi guida per esplicitare le motivazioni della nostra ricerca, introdurre i risultati ottenuti e chiarirne la portata e l'interesse.

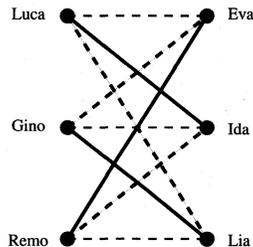
Il seguente risultato del matematico ungherese Dénes König (1916) ebbe particolare influsso sulla disciplina, allora nascente, della teoria dei grafi.

TEOREMA 1. – *Ogni grafo bipartito e regolare contiene un accoppiamento perfetto.*

Tale teorema è noto come il «Teorema dei Matrimoni» per le ragioni suggerite in figura, dove ogni arco individua una coppia (uomo/donna) matrimoniabile. L'ipotesi di bipartizione è tesa ad impedire archi di tipo uomo/uomo o donna/donna. L'ipotesi di regolarità impone che ogni nodo faccia capo ad uno stesso numero di archi.



Accoppiamento Perfetto



Giro di Balli o Colorazione

Il «Teorema dei Balli» di König (1916) è la seguente riformulazione del Teorema 1:

TEOREMA 2. – *Agli archi di un grafo bipartito e regolare è possibile associare dei colori di modo che ad ogni nodo sia incidente uno ed un solo arco di ciascun colore.*

Qualora il grafo non sia regolare è consuetudine indicare con Δ la massima valenza nel grafo, ossia il numero massimo di archi facenti capo ad uno stesso nodo. È sempre possibile aggiungere archi e nodi in modo da ottenere un grafo regolare senza distruggere la bipartizione o incrementare la massima valenza Δ . Ciò conduce alla formulazione di maggiore interesse per le applicazioni pratiche:

TEOREMA 3. – *In un grafo bipartito G sia Δ il numero massimo di archi incidenti ad uno stesso nodo. Allora, utilizzando Δ colori distinti, è possibile colorare gli archi di G di modo che ad ogni nodo sia incidente al più un arco di ciascun colore.*

APPLICAZIONE TIPO: Stesura degli orari in una scuola.

È data una lista L di coppie (c, i) classe-insegnante. Una stessa coppia può apparire più volte in L ed indica, ad ogni occorrenza, una diversa ora di lezione da allocarsi nell'orario. Un Orario Settimanale è un assegnamento di ore, da un insieme di ore disponibili H , alle coppie (c, i) in L , dove due coppie con la stessa classe o con lo stesso insegnante ricevono ore diverse di H .

Teorema 3 implica che un Orario Settimanale esiste se e solo se il numero di ore in H non è inferiore al massimo numero di volte che un insegnante od una classe appaiono in L .

La tesi contiene una semplice dimostrazione dei Teoremi 1 e 2. Tale dimostrazione, pur nella sua brevità, non poggia su altri risultati. Essa verrà pubblicata da *Journal of Graph Theory* ed è stata apprezzata dai più insigni studiosi di teoria dei grafi.

TEOREMA 4. – *Ogni grafo bipartito e regolare è fattorizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia G un controesempio col minor numero di archi. Allora G è r -regolare per un qualche intero $r \geq 1$. Sia $e = uv$ un arco di G . In G , rimuoviamo i nodi u e v , ed aggiungiamo quindi un insieme di archi F in modo da ottenere un grafo G' bipartito e r -regolare. Si noti che $|F| < r$ e che G' ha meno archi di G . Per l'assunzione di minimalità, G' contiene r 1-fattori disgiunti. Poichè $|F| < r$, almeno uno di questi 1-fattori, sia M' , è disgiunto da F . Pertanto $M = M' \cup \{e\}$ è un 1-fattore di G . Ora $G \setminus M$ è fattorizzabile. Ma allora G è fattorizzabile. ■

Nel caso non bipartito il problema della fattorizzazione di grafi si complica assai. Per un teorema fondamentale di Jack Edmonds (1965) l'attenzione va ristretta ai soli r -grafi (grafi r -regolari dove, per ogni insieme dispari di nodi S , almeno r archi hanno precisamente un estremo in S). Il primo 3-grafo non fattorizzabile è dovuto a Julius Petersen (1898). Si pensava tuttavia che per $r \geq 4$ ogni r -grafo fosse quanto meno scomponibile come somma di un r_1 -grafo e di un r_2 -grafo, con $r_1 + r_2 = r$. La tesi ha sfatato questa ed altre convinzioni sulla scomponibilità degli r -grafi.

Ma passiamo ad un'altro tema della tesi. Un grafo (G, T) è un grafo G ed un insieme di nodi T con $|T|$ pari. Ad ogni arco e di G è associato un reale non-negativo c_e , detto la *capacità* di e . Dato un insieme di nodi S , il *taglio* $\delta_G(S)$ è l'insieme degli archi con una ed una sola estremità in S . Se $|S \cap T|$ è dispari allora $\delta_G(S)$ è

un T -taglio. Un T -taglio minimo di (G, T, c) è un T -taglio $\delta(X)$ di (G, T) tale che:

$$c(\delta(X)) = \lambda_{G, T} = \min \{c(\delta(S)) : \delta(S) \text{ è un } T\text{-taglio di } (G, T)\}$$

dove la capacità $c(F)$ di un insieme F di archi è definita come $\sum_{e \in F} c_e$.

Un T -accoppiamento è una partizione \mathcal{P} di T tale che $|P| = 2$ per ogni classe P di \mathcal{P} . Definiamo il valore di un T -accoppiamento \mathcal{P} come $val_G(\mathcal{P}) =$

$$\min_{\{u, v\} \in \mathcal{P}} \lambda_{G, \{u, v\}}.$$

Un risultato offerto dalla tesi è il seguente.

TEOREMA 5. – *La minima capacità di un T -taglio eguaglia sempre il massimo valore di un T -accoppiamento.*

Dato un insieme di nodi S con $|S \cap T|$ pari, indichiamo con G_S il grafo ottenuto da G identificando tutti i nodi in S in un singolo nodo. Se definiamo $T_S = T \setminus S$ allora (G_S, T_S) è un grafo. Il seguente algoritmo computa il valore $\lambda_{G, T}$.

Algoritmo T-TAGLIO (G, T, c)

1. se $T = \emptyset$ ritorna ∞ ; *commento:* (G, T) non contiene alcun T -taglio
2. siano s e t due nodi distinti di T ;
3. sia $\delta(S)$ un $\{s, t\}$ -taglio minimo;
4. se $\delta(S)$ è un T -taglio ritorna $\min \{c(\delta(S)), \text{T-TAGLIO}(G_{\{s, t\}}, T_{\{s, t\}}, c)\}$;
altrimenti ritorna $\min \{\text{T-TAGLIO}(G_S, T_S, c), \text{T-TAGLIO}(G_S, T_S, c)\}$;

In effetti l'Algoritmo T-TAGLIO individua un T -taglio ed un T -accoppiamento ottimi e costituisce dimostrazione algoritmica del Teorema 5.

A. – Elenco dei risultati principali.

1. Una nuova e semplice dimostrazione di un teorema di König secondo il quale ogni grafo bipartito e regolare è fattorizzabile. Interesse teorico e didattico.

2. Un algoritmo esatto ed uno approssimato per la colorazione di archi in grafi bipartiti. L'algoritmo esatto migliora sul limite asintotico del caso peggiore noto in precedenza. L'algoritmo approssimato è anch'esso il migliore nel suo genere, impiegando $\Delta + 2$ colori per colorare gli m archi di un grafo bipartito con grado massimo Δ in tempo $\mathcal{O}(m \log \Delta)$. Interesse applicativo e teorico.

3. Un nuovo algoritmo polinomiale per calcolare le distanze in grafi non diretti e conservativi. Questo algoritmo può essere utilizzato per trovare accoppiamenti e T -giunti ottimali. L'algoritmo è concettualmente semplice e

diversi importanti teoremi possono essere dedotti da esso. L'interesse è principalmente teorico e didattico.

4. Un nuovo algoritmo per trovare T -tagli ottimali ed una caratterizzazione di tipo min-max per il valore di un T -taglio minimo. Ricordiamo come l'efficienza degli algoritmi di T -taglio minimo impiegati sia spesso un fattore critico in sistemi di tipo «branch and cut» per la soluzione di problemi NP -completi. Il nostro algoritmo è più efficiente ma soprattutto assai più semplice di quelli studiati ed impiegati precedentemente. Interesse applicativo, teorico e didattico.

5. Una miglior comprensione del nesso tra impaccare T -giunti e fattorizzare r -grafi. Tale collegamento era già stato osservato e studiato da Seymour. Le argomentazioni da noi fornite sono tuttavia molto più semplici ed anche più forti. In primo luogo, grazie alla nozione di grafo *semi-Euleriano* proposta nella tesi, è stato possibile formulare un chiaro «se e solo se». In secondo luogo, abbiamo attestato la finitezza del problema dell'impaccamento di T -giunti ogni qualvolta $|T|$ sia limitato da una costante. Risultati riguardanti l'impaccamento di T -giunti per piccoli valori di $|T|$ sono ricavati conseguentemente. Interesse teorico.

6. Esempi di r -grafi non scomponibili e di r -grafi poveramente accoppiabili per ogni $r > 3$. Questi evidenziano la falsità di varie ed importanti congetture proposte nella letteratura. Interesse teorico.

7. Utilizzando gli r -grafi non scomponibili, di cui al punto precedente, si è evidenziato come i coefficienti del sistema di Schrijver per il poliedro dei T -tagli possano essere comunque grandi. Interesse teorico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CONFORTI M. and RIZZI R., *Shortest Paths in Conservative Graphs*, apparirà in *Discrete Mathematics*.
- [2] KAPOOR A. and RIZZI R., *Edge-coloring bipartite graphs*, apparirà in *SIAM Journal on Computing*.
- [3] RIZZI R., *König's Edge Coloring Theorem without augmenting paths*, apparirà in *Journal of Graph Theory*.
- [4] RIZZI R., *Indecomposable r -graphs and some other counterexamples*, apparirà in *Journal of Graph Theory*.

Indirizzo: via Zara n.8/D - 38100 Trento

e-mail: romeo@euler.math.unipd.it

Dottorato in Matematica Computazionale ed Informatica Matematica

(sede amministrativa: Padova) - Ciclo IX

Direttore di ricerca: Prof. Michele Conforti

Controrelatore: Prof. Bert Gerards, CWI, Amsterdam, Netherlands.