BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ELENA CELLEDONI

Metodi di Krylov per sistemi lineari di Equazioni Differenziali Ordinarie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 177–180.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_177_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Metodi di Krylov per sistemi lineari di Equazioni Differenziali Ordinarie.

ELENA CELLEDONI

1. - Introduzione.

L'avvento del calcolo parallelo ha rinnovato l'interesse della ricerca nell'utilizzo dei metodi iterativi per la risoluzione numerica di sistemi lineari di Equazioni Differenziali Ordinarie (EDO).

Consideriamo il seguente sistema lineare di EDO

$$(1) \quad \dot{x} + Mx = f \quad \text{in } [0, T],$$

dove $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $f \in (C[0, T])^m$ e $x \in (C^1[0, T])^m$, con valore iniziale $x(0) = 0$ o con la condizione di periodicità $x(0) = x(T)$. Effettuando uno splitting di M , $M = P - Q$, che ci porta a

$$(2) \quad \dot{x} + Px = Qx + f,$$

e applicando ad ambo i membri di (2) gli operatori integrali

$$(3) \quad R_I(u)(t) := \int_0^t e^{(s-t)P} u(s) ds,$$

e

$$(4) \quad R_P(u)(t) := e^{-tP} (I - e^{-TP})^{-1} \int_0^T e^{(s-T)P} u(s) ds + \int_0^t e^{(s-t)P} u(s) ds$$

rispettivamente per il caso con valore iniziale e per il caso periodico, è possibile riformulare (1) in forma di equazione di seconda specie

$$(5) \quad (I - K)x = b$$

ove $K = RQ$, $b = Rf$, $R = R_I$ e $R = R_P$ rispettivamente. In entrambi i casi l'operatore K è compatto negli spazi $(C[0, T])^m$ e $(L_2[0, T])^m$. Se si considera il metodo delle approssimazioni successive per risolvere (5) si ottengono i classici metodi Waveform Relaxation (WR) e qualora $P = 0$ l'iterazione di Lindelöf-Picard. In questo contesto ci si riferisce a (5) come all'equazione di seconda specie del WR.

Lo studio e l'applicazione del WR come metodologia numerica per la soluzione di (5) è stato ampiamente considerato in letteratura [1] ed ha messo in luce

i limiti di queste strategie e la necessità di trovare opportune accelerazioni per i metodi WR.

In questa tesi si tratta in primo luogo l'applicazione di metodi di Krylov nella risoluzione dell'equazione di seconda specie del WR come naturale accelerazione del classico approccio di tipo WR. Si propone inoltre come alternativa a queste metodologie una strategia diversa, benché anch'essa basata sulla costruzione di spazi di Krylov, attraverso un approccio diretto alla formulazione differenziale del problema (1).

2. - Contenuto della Tesi.

L'approssimazione numerica di equazioni lineari del tipo $Ax = (I - K)x = b$, con K operatore compatto su uno spazio di Hilbert, tramite metodi basati sulla costruzione di spazi di Krylov

$$W_n(A, b) = \text{span} \{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\},$$

è stata considerata recentemente da vari autori [3], [4], [6] ed è l'oggetto del secondo capitolo della tesi.

Viene sviluppata una teoria originale volta ad unificare sotto la medesima formulazione generale metodi di Krylov diversi. I metodi sono distinti in due classi principali, Metodi Proiettivi su Spazi di Krylov (MPK) e metodi di Quasi-Minimizzazione del Residuo (MQMR). Si dimostra che un MPK è legato al suo corrispondente MQMR attraverso una opportuna combinazione lineare convessa e che in caso di «breakdown» di un assegnato metodo MPK il corrispondente MQMR ristagna.

Nel terzo capitolo viene considerata la convergenza dei metodi. Si forniscono stime esatte delle norme dei residui dei metodi MPK e MQMR nella formulazione generale data nel capitolo precedente. Vi si deducono risultati di convergenza classici per i metodi più popolari, giungendo a noti risultati di convergenza q -superlineare per i metodi FOM e GMRES e a stime dipendenti dai valori singolari degli operatori e dalle caratteristiche di compattezza degli operatori stessi. Da tali risultati si sviluppano risultati di convergenza basati sulla distribuzione degli autovalori, utilizzando un approccio che fornisce una originale correlazione tra stime diverse note in letteratura per i metodi.

Il quarto capitolo riguarda una trattazione generale del problema discretizzato ottenuto nell'applicazione di due diversi schemi di discretizzazione trattati in [5] e [2]. I risultati di [5] e [2] sono sintetizzati ed estesi nei teoremi del quarto capitolo grazie alle stime fornite nel capitolo precedente. Si forniscono maggiorazioni delle norme dei residui delle discretizzazioni in termini dei residui dell'iterazione continua.

Nel capitolo 5 si considera il caso di sistemi lineari di EDO con valori iniziali e condizione di periodicità e l'equazione di seconda specie del WR che ne deriva. Si

dimostra che le ipotesi della teoria sviluppata nei capitoli precedenti sono soddisfatte. Per gli operatori relativi al problema continuo si ottengono risultati di compattezza e per il caso del problema discretizzato si dimostra la collettiva compattezza degli operatori ottenuti integrando le EDO attraverso metodi Runge-Kutta continui. Il capitolo comprende anche dei test numerici per la sperimentazione dei metodi trattati. I test si riferiscono alla risoluzione numerica di equazioni paraboliche alle derivate parziali. Si riporta l'andamento dei vari metodi per problemi ai valori iniziali e di tipo periodico, riportando grafici delle norme dei residui.

Sono state effettuate sperimentazioni con diversi valori per il passo spaziale.

Il sesto capitolo propone un metodo nuovo per l'approssimazione di sistemi lineari di EDO a grandi dimensioni attraverso la risoluzione di sistemi di EDO di dimensioni ridotte ottenuti proiettando la matrice del sistema lineare di partenza su opportuni spazi di Krylov.

Se consideriamo il sistema lineare (1) con $x(0) = 0$, la funzione vettoriale a termine noto $f = [f_1, \dots, f_n]^T$ ammette la seguente rappresentazione

$$f(t) = \sum_{i=1}^k f_i(t) e_i,$$

ove gli e_i sono i vettori della base canonica e le f_i sono le componenti scalari di f . Quindi un problema di tipo (1) può essere approssimato risolvendo separatamente (in parallelo) $k \leq m$ problemi del tipo

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x}_i - Mx_i = g \cdot w & \text{in } [0, T] \\ x_i(0) = 0 \end{cases}$$

con $g: [0, T] \rightarrow R$ e $w \in R^m$ e $g(t) \cdot w = [g(t)w_1, \dots, g(t)w_m]^T$. La norma euclidea è indicata con $\|\cdot\|_2$.

Come ben noto, il problema (6) ha soluzione

$$x(t) = \int_0^t e^{(t-s)M} f(s) \cdot v ds .$$

Per ogni intero positivo n , sia $W_n(M, w) = \text{span}\{w, Mw, \dots, M^{n-1}w\}$ lo spazio di Krylov n -simo associato ad M e w e sia $v_1, \dots, v_n$ la base ortogonale per tale spazio ottenuta attraverso l'algoritmo di Arnoldi. Siano $V_n = [v_1, \dots, v_n]$ e $H_n = V_n^* M V_n$.

Il metodo viene definito a partire dalla risoluzione del seguente sistema lineare di EDO ridotto

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) - H_n z(t) = f(t) \cdot \|w\|_2 \cdot e_1, & t \in [0, T]. \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

l'approssimazione x_n si costruisce nel modo seguente

$$x_n(t) = V_n z(t) = \sum_{j=1}^n z_j(t) \cdot v_j.$$

Il residuo del processo iterativo si può scrivere come

$$(8) \quad r_n(t) = h_{n+1, n} e_n^T z(t) \cdot v_{n+1}.$$

e ciò consente di effettuare un raffinamento iterativo risolvendo con la medesima metodologia un problema analogo a (6) in cui l'incognita è la funzione errore ed il termine noto è (8).

Le equazioni test per gli esperimenti numerici relativi all'algoritmo proposto provengono dalla semidiscretizzazione di equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico.

3. - Temi di ricerca futuri.

Per concludere si indicano alcune tematiche di ricerca future:

- applicazione dei metodi a problemi derivanti dall'analisi di circuiti integrati;
- analisi delle modalità di applicazione dei metodi;
- implementazione parallela degli algoritmi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BURRAGE K., *Parallel methods for solving Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press (1996).
- [2] CAMPBELL S.L., IPSEN I.C.F., KELLEY C.T., MEYER C.D. and XUE Z.Q., *Convergence estimates for solutions of integral equations with GMRES*, Journal of Integral Equations and Appl., 8 (1996), 19-34.
- [3] KELLEY C.T. and XUE Z.Q., *GMRES and Integral Operators*, SIAM J. Sci. Comput., 17 (1996), 217-226.
- [4] MORET I., *A note on the superlinear convergence of GMRES*, SIAM J. Num. Anal., 34 (1997), 513-516.
- [5] MORET I., *Discrete Krylov subspace methods for equations of the second kind*, Int. J. of Comp. Math., in corso di stampa.
- [6] NEVANLINNA O., *Convergence of Iterations for Linear Equations*, Birkhäuserm Basel (1993).

Dipartimento di Scienze Matematiche, Università di Trieste
 Dottorato in Matematica Computazionale e Informatica Matematica
 (sede amministrativa: Padova) - Ciclo IX
 Direttore di ricerca: Prof. Igor Moret
 Correlatore: Prof. Alfredo Bellen