Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesco Uguendoli

Modelli di Spin deterministici con comportamento vetroso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 171–174.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_171_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 171-174

Modelli di Spin deterministici con comportamento vetroso.

FRANCESCO UNGUENDOLI

I vetri di spin (più noti con il nome inglese di *spin glass*) costituiscono al giorno d'oggi una branca importante della fisica teorica e della fisica matematica e rappresentano una delle frontiere più interessanti e studiate nella meccanica statistica e nella teoria dei sistemi complessi. Con il termine «vetri di spin» si intendono dei particolari sistemi di spin, nell'ambito della teoria delle transizioni di fase magnetiche, che a basse temperature risultano «congelati» in uno stato disordinato, invece che in uno periodico e ordinato come per gli usuali sistemi ferromagnetici e antiferromagnetici. Il loro studio è iniziato nell'ambito della fisica della materia e della chimica con una serie di ricerche sperimentali su soluzioni e leghe che mostravano comportamenti particolari rispetto alle sollecitazioni di campi magnetiche, che non potevano rientrare nell'ambito delle ordinarie transizioni di fase. Dagli esperimenti si è passati ai tentativi di generalizzazione e unificazione dei fenomeni, giungendo, nel 1975, all'introduzione dei fondamentali modelli matematici di Edwards e Anderson e, quasi contemporaneamente, di Sherrington e Kirkpatrick. Entrambi questi modelli presentano quelle che erano ritenute le due caratteristiche essenziali per il comportamento vetroso: un certo grado di aleatorietà del sistema, che poteva essere o nella posizione dei siti o nella distribuzione degli accoppiamenti tra gli spin, e la competizione tra differenti tipi di interazione, in genere alcune ferromagnetiche e altre antiferromagnetiche, che impediscono l'esistenza di un'unica configurazione di spin favorita contemporaneamente da tutte le interazioni.

Tra i metodi utilizzati per affrontare lo studio dei vetri di spin ricordiamo il Metodo della Replica (la cui giustificazione matematica è ben lungi dall'essere ottenuta), che ha portato attraverso i lavori di Parisi ad una prima soluzione completa per modelli di tipo Sherrington-Kirpatrick e il metodo basato sull'equazione TAP. Tale formalismo, introdotto da Thouless, Anderson e Palmer ([5]), si sviluppa attraverso lo studio di un'equazione di campo medio per la magnetizzazione locale $m_i = \langle S_i \rangle$ per modelli SK:

$$m_i = \tanh\left[\beta\left(\sum_j J_{ij} m_j + h_i - \beta \sum_j J_{ij}^2 (1 - m_j^2)\, m_i\right)\right] \tag{1}$$

Anche se quest'ultimo metodo non conduce al pari del primo ad una soluzione completa per ogni temperatura, attraverso lo studio delle equazioni TAP si ottengono risultati ugualmente interessanti e in qualche modo di più immediata interpretazione fisica rispetto al formalismo matematico assai complesso del metodo della replica di Parisi.

Il contributo originale della tesi (apparso nei lavori [1], [2]) rientra nell'ambito di una differente classe di modelli, introdotta recentemente da Marinari, Parisi, Ritort ([3]) e da Parisi, Potters ([4]), in cui si evidenziano ancora transizioni di fase di tipo vetroso, pur non essendo presente alcun genere di aleatorietà nella posizione degli spin o nelle interazioni, ma solo fenomeni di competizione tra i differenti accoppiamenti. Nei lavori di Parisi e *al.*, che prendono spunto dal problema fisico e informatico di trovare sequenze binarie in bassa autocorrelazione, viene studiato tra altri un modello in cui l'Hamiltoniana del sistema è data da:

$$H_S = \sum_{x=1}^{N} \left[\sum_{y=1}^{N} S_x(\sigma_y) - \sigma_x \right]^2 \tag{2}$$

dove:

$$S_x(\sigma_y) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sin\left(\frac{2\pi xy}{N} \right) \sigma_y \tag{3}$$

per il quale gli autori ottengono uno stato fondamentale formato dalla successione dei simboli di Legendre nel caso in cui $2N+1$ sia un primo dispari. Inoltre per tale modello, e più in generale per un operatore di accoppiamento ortogonale, viene ottenuta un equazione di campo medio tipo TAP:

$$\tanh^{-1} m_i + 2\beta G'(\beta(1-q))\, m_i - \beta \sum_j J_{ij} m_j = 0 \tag{4}$$

dove $G(z)$ è data da:

$$G(z) = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{1+4z^2}+1}{2} \right) + \frac{1}{2}\sqrt{1+4z^2} - \frac{1}{2} \tag{5}$$

Tale equazione viene studiata principalmente con metodi numerici mostrando un buon accordo con le simulazioni e con risultati ottenuti dagli stessi autori attraverso il metodo della replica.

Il lavoro di tesi prende in esame due modelli, il primo dei quali coincide con quello già introdotto da Parisi e *al*, il secondo introdotto dall'autore della tesi in collaborazione ([1]), con operatori di accoppiamento dati rispettivamente da:

$$J_{i,j} = \frac{2}{\sqrt{2N+1}} \sin\left(\frac{2\pi ij}{2N+1} \right), \qquad i, j = 1, \ldots, N \tag{6}$$

$$J(A)_{jk} = C_N N^{-1/2} \cos\left[(2\pi i/N)(gj^2 - jk + gk^2) \right], \qquad |C_N| = 1 \tag{7}$$

Per il primo modello sono stati esaminati separatamente i casi in cui il valore di $2N+1$ è congruo rispettivamente a 3 e a 1, modulo 4, ottenendo i seguenti risultati:

(A) sia $2N+1 = 4m+3 = p_1 p_2 \cdots p_s$ prodotto di s primi distinti; allora vale:

L'energia dello stato fondamentale $-N/2$ è asintoticamente degenere di ordine $D = O(2^{N^{s-1/s}})$, ossia esistono D configurazioni di spin distinte fra loro $\sigma_j^{(l)}: j = 1, \dots, p;\ l = 1, \dots, D$ tali che la loro energia $E(\sigma_j^{(l)})$ soddisfa la stima:

$$E(\sigma_j^{(l)}) \leqslant -\frac{N}{2}(1 - KN^{-1/s}) \tag{8}$$

per un'opportuna costante positiva K indipendente da l.

(2) Le D distinte configurazioni di spin $\sigma_j^{(l)}$ si ottengono come segue:

$$\sigma_j^{(l)} = \begin{cases} \chi(j), & \text{se } \chi(j) \neq 0 \\ \pm 1 & \text{se } \chi(j) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

dove $\chi(j)$ èil simbolo di Jacobi di $j \in \mathbf{Z}_p$ rispetto a $p = 2N + 1$:

$$\chi(j) = \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{j}{p_i}\right), \qquad \left(\frac{j}{p_i}\right) = 0 \quad \text{se } (j, p_i) = 0 \tag{10}$$

e il numero degli zeri di $\chi(j)$ va come $N^{s-1/s}$ per N grande.

(B) sia $2N + 1 = 4m + 1$; allora J non ammette autovettori le cui componenti siano tutte ± 1 e il minimo della forma quadratica dell'energia $\langle u, Ju \rangle$ non è mai raggiunto quando u è una configurazione di spin. Come notato da Parisi questi risultati rappresentano una forte indicazione che possano esistere due (o più) differenti limiti termodinamici, in accordo alle proprietà aritmetiche del numero N di spin.

Per il secondo modello è stata invece ottenuta l'energia libera di Gibbs ed un'equazione di campo medio, basata su quella di Parisi Potters, tramite la quale si è determinata la temperatura critica per una transizione di fase; lo studio delle soluzioni in un intorno di tale temperatura critica ha portato al riconoscimento del suo carattere «vetroso». Più precisamente si ha:

PROPOSIZIONE 1. – *L'energia libera di Gibbs del modello con Hamiltoniana* $H_A(\sigma) = \sum_{j,k} J(A)_{jk} \sigma_j \sigma_k$ *dove* $J(A)$ *è data da*

$$J(A)_{jk} = C_N N^{-1/2} \cos[(2\pi i/N)(gj^2 - jk + gk^2)], \qquad |C_N| = 1 \tag{8}$$

risulta essere:

$$\begin{cases} \beta\Phi = 1/2 \sum_{i=1}^{N} \{(1 + m_i)\log(1 + m_i)/2 + (1 - m_i)\ln(1 - m_i)/2\} - \\ \qquad\qquad -\beta/2 \sum_{i,j=1}^{N} J(A)_{ij} m_i m_j - NG(\beta(1 - q)) \\ G(\beta) = \beta^2/(8 + 4\beta^2) \end{cases} \tag{12}$$

dove m_l: $l = 1, \dots, N$ *è la magnetizzazione del sito* l *e* $q = 1/N \sum_{l=1}^{n} m_l^2$ *è il parametro d'ordine di Edwards-Anderson. La corrispondente equazione di campo medio* *del modello (che si ritiene essere esatta per il suo carattere a range infinito) è:*

$$Q_i \equiv \tanh^{-1} m_i + 2\beta G'(\beta(1-q))\, m_i - \beta \sum_j J(A)_{ij} m_j = 0 \tag{13}$$

e la temperatura critica per una transizione di fase da essa determinata è vicino a $\beta \sim 1.25$ *ossia vicino a* $T \sim 0.8$*. Inoltre se* $m = (m_l)_{l=1,\dots,N}$ *è una soluzione di tale equazione si ha* $1/N \sum_{l=1}^{N} m_l \to 0$*, e* $1/N \sum_{l=1}^{N} m_l^2 \neq 0$ *per cui la transizione di fase appare essere di tipo vetroso, e tutte le soluzioni* m_l *hanno la stessa energia libera, cosicchè la termodinamica è indipendente dal loro numero che varia sensibilmente con la cardinalità dell'intero* N*.*

Per entrambi i modelli studiati i risultati sono stati ottenuti utilizzando, oltre a strumenti classici della teoria dei numeri e degli sviluppi diagrammatici, la possibilità di rappresentare le matrici di accoppiamento come quantizzazione di opportune matrici simplettiche sul toro bidimensionale, e quindi tramite le loro proprietà di scrivere, in alcuni casi in maniera completamente esplicita, una base di autovettori per tali operatori. Più esattamente, il primo modello coincide con la parte immaginaria dell'operatore quantizzato della matrice simplettica unitaria 2×2, mentre il secondo modello corrisponde alla quantizzazione di una classe di mappe iperboliche della forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } a = d = 2g,\ b = 1,\ c = 4g^2 - 1,\ g \in \mathbf{N} \tag{14}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BORSARI I., DEGLI ESPOSTI M., GRAFFI S. and UNGUENDOLI F., *Deterministic spin models with a glassy phase transition*, J. Phys. A: Math. Gen., **30** (1997), L155.

[2] BORSARI I., GRAFFI S. and UNGUENDOLI F., *Ground states for a class of deterministic spin models with glassy behaviour*, J. Phys. A: Math. Gen., **29** (1996), 1593.

[3] MARINARI E., PARISI G. and RITORT F., *Replica field theory for deterministic models (II): a non-random spin glass with glassy behaviour*, J. Phys.A: Math. Gen., **27** (1994), 7647.

[4] PARISI G. and POTTERS M., *Mean field equations for spin models with orthogonal interaction matrices*, J. Phys.A: Math. Gen., 28 (1995), 4481.

[5] THOULESS D.J., ANDERSON P.W. and PALMER R.G., *Solution of a solvable model of spin glass*, Phil. Mag., **35** (1977), 593.

Indirizzo: Via di Frino 16 - 40136 Bologna
e-mail: unguendo@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede del dottorato: Bologna) - Ciclo VIII
Direttore della ricerca: Prof. S. Graffi