Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giuseppina Vannella

Alcune applicazioni della Teoria di Morse a problemi di tipo ellittico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 157–160.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_157_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 157-160

Alcune applicazioni della Teoria di Morse a problemi di tipo ellittico.

GIUSEPPINA VANNELLA

La Teoria di Morse è un potente strumento della geometria differenziale che consente diverse applicazioni in problemi di analisi, permettendo di collegare la struttura di una varietà riemanniana alla struttura dei punti critici di un funzionale definito sulla varietà stessa. Nella tesi di dottorato in oggetto si è cercato di verificare l'applicabilità della teoria ad alcuni problemi di tipo ellittico, in modo da non ottenere solo risultati di esistenza di soluzioni, ma da permettere anche uno studio qualitativo delle stesse. Ogni parte della teoria viene presentata in congiunzione ad un problema concreto della forma

$$-\varepsilon \Delta u(x) + F'(u(x)) = 0$$

dove $F\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ è una funzione che verifica opportune condizioni. I problemi affrontati sono di tipo variazionale, ovvero si traducono nella ricerca di punti critici di opportuni funzionali, provando che tali punti critici corrispondono a tutte e sole le soluzioni del problema in studio, ed è appunto a tali funzionali che viene applicata la teoria di Morse.

1. – Richiami di teoria di Morse classica e generalizzata.

Siano V uno spazio di Hilbert, V' il suo duale ed f un funzionale di classe C^1 definito in un aperto U di V.

DEFINIZIONE 1. – *Un elemento x di U si dice* **punto critico** *di f se $df(x) = 0$. Si denota con K_f l'insieme di tali punti. Si dice che f verifca la* **condizione di Palais-Smale** *se ogni successione $(x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ tale che $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c \in \mathbf{R}$ e $\lim_{n \to \infty} df(x_n) = 0 \in V'$ ha una sottosuccessione che converge in V. Se f è di classe C^2 ed $x \in K_f$, l'***indice di Morse** *di x è la dimensione massimale di un sottospazio di V nel quale $d^2 f(x)$ è definito negativo, e si denota col simbolo $m(x)$. Un punto critico si dice* **non degenere** *se la dimensione del nucleo di $d^2 f(x)$ è 0, mentre in caso contrario si dice* **degenere**.

Un **funzionale** *$f\colon U \to \mathbf{R}$ si dice* **di Morse** *se è di classe C^1 e differenziabile due volte in un intorno dei suoi punti critici, tutti i suoi punti critici sono non degeneri, soddisfa la condizione di Palais-Smale ed è estendibile ad una funzione di classe C^1 in un intorno di $\overline{U}$. L'insieme dei funzionali di Morse definiti in U si denota col simbolo $\mathcal{M}(\overline{U})$. Se $f \in \mathcal{M}(\overline{U})$, il* **polinomio di Morse** *di un sottoinsieme K di K_f è la serie formale $m_\lambda(K, f) = \sum_{x \in K} \lambda^{m(x)}$, con la convenzione che sia $\lambda^\infty = 0$.*

Sussiste il seguente

TEOREMA 1. – *Se $f \in \mathcal{M}(\overline{U})$ è limitata dal basso, allora $m_\lambda(K, f) = P_\lambda(\overline{U}) + (1 + \lambda)\, Q_\lambda$, dove $P_\lambda(\overline{U})$ è il polinomio di Poincaré di $\overline{U}$.*

Nello studio dei problemi trattati in questa tesi si incontrano delle difficoltà di tipo tecnico, in quanto i punti critici dei funzionali associati ai problemi stessi possono essere degeneri. Per affrontarla si è utilizzata una generalizzazione della teoria di Morse recentemente sviluppata da Benci e Giannoni [1]. In essa si introduce una nuova classe $\mathcal{F}(\overline{U})$ piú ampia di $\mathcal{M}(\overline{U})$ e, per ogni $f \in \mathcal{F}(\overline{U})$ e $K \subset K_f$, si definisce una serie formale detta **Indice di Morse** di K e denotata col simbolo $i_\lambda(K, f)$ tale che se x_0 è un punto critico non degenere di f, allora $i_\lambda(\{x_0\}, f) = \lambda^{m(x_0)}$, ed inoltre sussiste il seguente teorema, che generalizza il precedente

TEOREMA 2. – *Se $f \in \mathcal{F}(\overline{U})$ è limitata dal basso, allora* $i_\lambda(K, f) = P_\lambda(\overline{U}) + (1+\lambda)\, Q_\lambda$.

2. – Applicazione ad un problema modello.

Si consideri il seguente problema [3]

$$(P_1)\quad \begin{cases} u \in C^2(\overline{\Omega}) \\ -\varepsilon\Delta u + F'(u(x)) = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ è un insieme aperto e limitato con frontiera sufficientemente regolare ($n \geq 2$), $\varepsilon > 0$ è un numero fissato ed $F \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$ è una funzione pari che si annulla solo in 1 ed in -1, avente un massimo locale in 0, con $F(0) = 1$ ed $F''(0) < 0$, inoltre esiste $a > 0$ tale che $\forall t \geq 1$ $F''(t) \geq a$ ed infine F ha crescita sottocritica (ovvero esistono b, $c \geq 0$ tali che $\forall t \in \mathbf{R}$ $|F''(t)| \leq b|t|^{p-2} + c$, con $p \in]2, 2^*[$ e $2^* = 2n/n-2$ se $n \geq 3$, mentre $p > 2$ se $n = 2$). Da tali ipotesi discende immediatamente che esiste $\beta \in]0, 1[$ tale che $\forall t \in]-\beta, \beta[$ risulta $F''(t) < 0$ ed $F''(-\beta) = F''(\beta) = 0$.

Le soluzioni di (P_1) sono i punti critici del funzionale $E_\varepsilon(u) = (\varepsilon/2)\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega F(u(x))\,dx$ definito sullo spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$. Esso è di classe C^2 ma puó avere dei punti critici degeneri, pertanto non vi si puó applicare la teoria di Morse classica. Si dimostra peró che appartiene alla classe $\mathcal{F}(H^1(\Omega))$ e, applicando la generalizzazione di cui alla sezione precedente, si prova l'esistenza di un numero di punti critici arbitrariamente grande per ε sufficientemente piccolo, con un'informazione sull'indice di Morse di tali punti critici. Questa informazione consente di stimare l'insieme dei punti di Ω in cui u assume valori vicini allo zero, mostrando che esso non puó essere molto grande. Si prova infatti che, comunque si fissino $\alpha < \beta$ e $j \in \mathbf{N}$, per $\varepsilon \to 0$, tutti i punti critici u di E_ε aventi indice di Morse minore di j tendono a concentrare i loro valori al di fuori dell'intervallo $]-\alpha, \alpha[$. Piú precisamente abbiamo il seguente

TEOREMA 3. – *Fissato $\alpha \in]0, \beta[$, siano ε ed l due numeri strettamente positivi, u un punto critico di E_ε avente indice di Morse $m(u)$, e si denotino con $\Gamma_\alpha(u)$ l'insieme $\Gamma_\alpha(u) = \{x \in \Omega / F''(u(x)) < -\alpha\}$ e con $N(u, l)$ il piú grande numero di ipercubi n-dimensionali di lato l, aperti e disgiunti che possono essere contenuti in $\Gamma_\alpha(u)$. Esiste una successione decrescente ed infinitesima $(k_j)_{j \geq 1}$ tale che, se $\varepsilon < lk_j$, allora $N(u, l) \leq m(u)/j$. Inoltre, fissati $j \in \mathbf{N}$ ed $l > 0$, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tali* *che per ogni* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *ed ogni punto critico* u *di* E_ε *avente indice* $m(u) \leqslant j$, *si ha* $N(u, l) = 0$.

È bene precisare che tale risultato sussiste anche nel caso in cui in (P_1) si impongano condizioni al bordo di Dirichelet al posto di quelle di Neumann.

Inoltre si è studiata una generalizzazione, che denoteremo con (P_2), del problema (P_1) nella quale F è piú generica, in quanto le si richiede di essere C^2, coerciva, di avere crescita sottocritica, esattamente k punti di massimo relativo e derivata seconda non nulla nei punti massimo è minimo relativo. Ovviamente questo nuovo problema ha $2k + 1$ soluzioni banali, in corrispondenza delle funzioni costantemente uguali, in Ω, ad uno dei $k + 1$ punti di minimo oppure dei k punti di massimo di F. Si dimostra che anche al funzionale corrispondente a questo problema è possibile applicare la teoria di Morse generalizzata, che permette di provare il seguente

TEOREMA 4. – *Se* ε *è sufficientemente piccolo e non appartiene ad un insieme numerabile* A, *allora il problema* (P_2) *ha almeno* $2k$ *soluzioni non banali.*

3. – Applicazione a problemi equivarianti.

Successivamente si sono cercati risultati per problemi equivarianti, cioè in presenza di un gruppo G che agisce in modo da «produrre», per ogni soluzione u del problema, tutta un orbita G_u di soluzioni. In altre parole, tali problemi si traducono in forma variazionale nello studio di un funzionale G-invariante.

Consideriamo il seguente problema di tipo periodico

$$(P_3)\quad \begin{cases} u \in C^2(\mathbf{R}^2) \\ \quad -\varepsilon\Delta u(x, y) + F'(u(x, y)) = 0 & \text{in } \mathbf{R}^2 \\ u(x, y) = u(x + T, y) = u(x, y + S) & \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \end{cases}$$

dove $T, S > 0$ sono due periodi fissati ed $F \in C^2(\mathbf{R})$ è una funzione reale che soddisfa le stesse ipotesi di quella del problema (P_2). Posto $\Omega = [0, T] \times [0, S]$, le soluzioni del problema sono i punti critici del funzionale $A_\varepsilon(u) = (\varepsilon/2)\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega F(u(x, y))\, dx\, dy$ definito sullo spazio

$$H^1_{S,T} = \overline{\{u \in C^1(\Omega) / \forall (x, y) \in \Omega \;\; u(0, y) = u(T, y) \;\text{ e }\; u(x, 0) = u(x, S)\}}^{H^1(\Omega)}$$

sul quale agisce il gruppo di Lie compatto $G = \mathbf{R}^2/(\mathbf{Z}T \times \mathbf{Z}S)$ isomorfo al toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Si prova che A_ε è G-invariante, per cui se u è un punto critico di A_ε allora tutta l'orbita di u è una varietà connessa di punti critici. Quindi tali punti critici sono degeneri (perché non sono isolati), ma ad A_ε si puó applicare la teoria di Morse per problemi equivarianti [2], da cui si ottiene il seguente

TEOREMA 5. – *Esiste una successione infinitesima e decrescente* $(\eta_i)_{i \in \mathbf{N}}$ *tale che se* $\varepsilon \in]\eta_{i+1}, \eta_i[$, *allora esistono almeno* $ki + k$ *orbite di soluzioni di* (P_3).

Infine si sono considerati due sistemi, di cui il primo dato da

$$(P_4)\quad \begin{cases} u_1,\, u_2 \in C^2(\overline{\Omega}) \\ -\varepsilon\Delta u_1 + F_{x_1}(u_1,\, u_2) = 0 & \text{in } \Omega \\ -\varepsilon\Delta u_2 + F_{x_2}(u_1,\, u_2) = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = \dfrac{\partial u_2}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ è come in (P_1) ed $F \in C^2(\mathbf{R}^2,\, \mathbf{R}^+)$ è una funzione a simmetria sferica che si annulla solo sulla sfera unitaria S^1, avente un massimo relativo nell'origine, coerciva e con crescita sottocritica. Il funzionale corrispondente è invariante per l'azione del gruppo $O(2)$ delle matrici ortogonali di $\mathbf{R}^2$ e, applicando la teoria di Morse per problemi equivarianti, si prova che esiste un numero di varietà di soluzioni (omeomorfe ad S^1) arbitrariamente grande, a condizione di scegliere ε sufficientemente piccolo.

Il secondo sistema è un problema equivariante per un gruppo finito

$$(P_5)\quad \begin{cases} u_1,\, u_2 \dots u_m \in C^2(\overline{\Omega}) \\ -\varepsilon\Delta u_1 + F_{x_1}(u_1,\, u_2,\, \dots u_m) = 0 & \text{in } \Omega \\ -\varepsilon\Delta u_2 + F_{x_2}(u_1,\, u_2,\, \dots u_m) = 0 & \text{in } \Omega \\ \qquad \dots \\ -\varepsilon\Delta u_m + F_{x_m}(u_1,\, u_2,\, \dots u_m) = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = \dfrac{\partial u_2}{\partial n} = \dots = \dfrac{\partial u_m}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ è come in (P_1), G è un gruppo di matrici ortogonali $m \times m$ avente ordine primo e maggiore di 2 ed $F \in C^2(\mathbf{R}^m,\, \mathbf{R})$ è una funzione G-invariante, coerciva, con crescita sottocritica e tale che la matrice hessiana $H_{F(0)}$ è invertibile ed ha almeno un autovalore negativo. Il funzionale corrispondente a (P_5) è G-invariante, e ad esso è possibile applicare la teoria di Morse generalizzata, ricavando il

TEOREMA 6. – *Esiste una successione infinitesima e decrescente* $(\eta_i)_{i \in \mathbf{N}}$ *tale che se* $\varepsilon \in]\eta_{i+1},\, \eta_i[$, *allora esistono almeno* $|ord\ G| \cdot 2i$ *soluzioni di* (P_5).

BIBLIOGRAFIA

[1] BENCI V. and GIANNONI F., *Morse Theory for C^1 functionals and Conley Blocks*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 4 (1994), 365-398.

[2] BOTT R., *Lectures on Morse Theory, old and new*, Bull. Americ. Mat. Soc., **2** (1988), 331-358.

[3] VANNELLA G., *Some qualitative properties of the solutions of an elliptic equation via Morse Theory*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, **9** (1997), 297-312.

Dipartimento di Matematica, Università di Bari
e-mail: vannella@dm.uniba.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo VII
Direttore di ricerca: Vieri Benci (Facoltà di Ingegneria, Università di Pisa)