Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Elisabetta Tornatore

Equazioni stocastiche di un gas viscoso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 153–156.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_153_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 153-156

Equazioni stocastiche di un gas viscoso.

ELISABETTA TORNATORE

In questa tesi si studia il sistema di equazioni di un fluido viscoso barotropico soggetto ad una perturbazione stocastica

$$\varrho\, dv + [\varrho(v\cdot\nabla)v - \mu\Delta v - \nabla(\lambda\nabla\cdot v) + \nabla p]\, dt = \varrho dW\,, \tag{1}$$

$$\partial_t \varrho + \nabla\cdot(\varrho v) = 0\,, \tag{2}$$

$$p = \varrho^{\gamma}, \tag{3}$$

ove v, p, ϱ indicano rispettivamente la velocità, la pressione e la densità, μ, λ sono i coefficienti di viscosità supposti inizialmente costanti, γ è una costante tali che $\gamma \geqslant 1$, W indica la perturbazione stocastica, considerata aggiuntiva alla forza esterna e descritta come derivata formale di un processo stocastico a valori in uno spazio di Hilbert.

Nel caso monodimensionale, se il sistema di equazioni (1)-(3) è considerato in un intervallo limitato della variabile spaziale, è comodo introdurre le coordinate lagrangiane di massa. Espresse nelle coordinate lagrangiane le equazioni (1)-(3) si trasformano in

$$dv = [\mu(\varrho v_x)_x - p_x]\, dt + dW\,, \tag{4}$$

$$\partial_t \varrho + \varrho^2 v_x = 0\,, \tag{5}$$

$$p = \varrho^{\gamma}. \tag{6}$$

Il sistema di equazioni (4)-(6) è studiato nel dominio $D = [0, 1]$ della variabile spaziale e nell'intervallo di tempo $[0, T]$ $(T > 0)$, con la condizione al contorno della frontiera rigida ed impermeabile

$$v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0 \tag{7}$$

e con le condizioni iniziali

$$v(0) = v_0, \qquad \varrho(0) = \varrho_0, \tag{8}$$

(per le generalità sullo studio delle equazioni monodimensionali di un gas viscoso vedi [1]).

Nel quadro stocastico monodimensionale si hanno i seguenti teoremi che garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione globale (rispetto al tempo) supponendo inizialmente che W sia un processo a variazione limitata (nell'intervallo $[0, T]$) e successivamente che sia un processo di Wiener cilindrico.

TEOREMA 1. – *Sia* $(\Omega, F, (F_t)_{t>0}, P)$ *una base stocastica. Siano* W, v_0, ϱ_0 *variabili aleatorie definite su* Ω *a valori in* $BV(0, T; H_0^1(D)) \cap C(0, T; H^2(D) \cap H_0^1(D)) \times H_0^1(D) \times H^1(D)$ *tali che*

$$0 < \inf_{x \in D} \varrho_0(\omega)(x) \leq \sup_{x \in D} \varrho_0(\omega)(x) < \infty \qquad \forall \omega \in \Omega \,. \tag{9}$$

Allora esiste ed è unica la coppia di variabili aleatorie (v, ϱ) *a valori in* $L^p(0, T; H_0^1(D)) \cap L^2(0, T; H^2(D)) \times L^q(0, T; H^1(D)) \cap W_r^1(0, T; L^2(D))$ *(possono essere scelti arbitrariamente* $1 \leq p, q, r < \infty$*), tale che*

$$v(\omega) \in L^\infty(0, T; H_0^1(D)) \qquad \forall \omega \in D \,, \tag{10}$$

$$0 < \inf_{(x, t) \in D \times [0, T]} \varrho_0(\omega)(x, t) \leq \sup_{(x, t) \in D \times [0, T]} \varrho_0(\omega)(x, t) < \infty \qquad \forall \omega \in \Omega \,, \tag{11}$$

$$\varrho_t(\omega), \varrho_x(\omega) \in L^\infty(0, T; H_0^1(D)) \qquad \forall \omega \in D \,, \tag{12}$$

e l'equazione (4), *le condizioni* (7)-(8) *e la relazione*

$$\int_0^T (\varphi, dv(\omega))_{L^2(D)} = \int_0^T (\mu(\varrho(\omega)\, v_x(\omega))_x - p(\varrho(\omega))_x, \varphi)_{L^2(D)} dt + \tag{13}$$

$$+ \int_0^T (\varphi, dW(\omega))_{L^2(D)} \qquad \forall \varphi \in C(0, T; L^2(D)) \ \forall \omega \in \Omega$$

siano verificate (per i dettagli vedi [3]).

Supponiamo ora che la perturbazione W sia un processo cilindrico definito su una base stocastica $(\Omega, F, (F)_{t>0}, P)$ a valori in $H_0^1(D)$. Consideriamo la seguente base ortonormale in $L^2(D)$,

$$e_k = \sqrt{2} \sin k\pi x \,, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

per il processo W si suppongono le seguenti ipotesi

$$E(W(t) - W(s), e_k)(W(t) - W(s), e_m) = \delta_{km} \alpha_k (t - s) \tag{15}$$

$\forall k, m \in N - \{0\}$, $\forall t \in [0, \infty[$, $\forall s \in [0, t]$, α_k: una costante non negativa dipendente solo da k,

$$\sum_{k=1}^\infty k^4 \alpha_k < \infty \,. \tag{16}$$

Si noti che la (16) implica che W è un processo stocastico a valori in $H_0^1([0, 1]) \cap H^2([0, 1])$.

Si ha il seguente

TEOREMA 2. – *Sia* $(\Omega, F, (F_t)_{t>0}, P)$ *una base stocastica,* W *un processo di Wiener cilindrico a valori in* $H_0^1(D) \cap H^2(D)$, v_0, $\sigma_0 = \log \varrho_0$ *variabili aleatorie* *definite su Ω a valori in $H_0^1(D)$, $H^1(D)$ rispettivamente. Allora esiste ed è unica la coppia di variabili aleatorie* (v, σ) *soluzione del sistema* (4)-(6) *con le condizioni* (7)-(8) *a valori in*

$$L^\infty(0, T; H_0^1(D)) \cap L^2(0, T; H^2(D)) \times L^\infty(0, T; H^1(D)) \tag{17}$$

Idea della dimostrazione.

Tale teorema si dimostra procedendo per passi, si prova innanzitutto un risultato di esistenza locale della soluzione in forma stocastica e si estende quindi la soluzione locale utilizzando un procedimento di stime a priori.

Si prova infatti che se (v, ϱ) è soluzione del sistema di equazioni (5)-(6), allora supponendo la seguente relazione

$$\|v\|^2_{H_0^1(D)} + \|\sigma\|^2_{H^1(D)} \leq Q, \qquad P.q.s. \,(Q > 0) \tag{18}$$

si hanno le seguenti stime a priori

$$E\Big(\max_{0<t\leq T} \|v(t)\|^2_{L^2(D)}\Big) \leq N_1 < \infty\,. \tag{19}$$

Definiamo il tempo d'arresto

$$\tau_R(\omega) = \inf\{t > 0 \colon \|v(\omega, t)\|_{L^2(D)} + \|W(\omega, t)\|_{L^2(D)} > R\}$$

$$\exists \widetilde{m}, \widetilde{M} \colon 0 < \widetilde{m} \leq \varrho(x, t) \leq \widetilde{M} < \infty\,, \ \cup (x, t) \in D \times [0, T \wedge \tau_R] P.q.s.. \tag{20}$$

$$E\left(\int_0^{t \wedge \tau_R} \|v_x\|^2_{L^2(D)}\, dt\right) < \infty \tag{21}$$

$$\max_{0 < t \leq T \wedge \tau_R} \|\varrho_x\|^2_{L^2(D)} \leq N_2 < \infty\,, \ P.q.s. \tag{22}$$

$$E\left(\max_{0 < t \leq T \wedge \tau_R} \|v_x\|^2_{L^2(D)} + \int_0^{T \wedge \tau_R} \|v_{xx}\|^2_{L^2(D)}\, dt\right) < \infty\,. \tag{23}$$

(per i dettagli vedi [4]).

Il caso bi-dimensionale è una naturale generalizzazione dei risultati ottenuti. Si studia il sistema di equazioni (1)-(3) nel dominio $D = [0, 1]^2$ con le condizioni (7)-(8), le funzioni v, p e ϱ sono considerate periodiche di periodo 1 nelle coordinate spaziali, il coefficiente μ è una costante positiva mentre λ si considera una funzione positiva di ϱ, in particolare nella proposizione 1 è considerata una funzione qualsiasi di classe C^2, nelle proposizioni 2 e 3 viene considerata nella forma $\lambda = 1 + \varrho^\beta$ ove $\beta > 3$, la perturbazione stocastica W viene descritta come un processo di Wiener a valori in $(H^3(D))$. Si hanno le seguenti proposizioni

PROPOSIZIONE 1. – *Esistenza ed unicità della soluzione locale*

Siano w, v_0, ϱ_0 *variabili aleatorie definite su* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *a valori in* $C([0, T]; H^3(D))$, $H^2(D)$, $H^2(D) \cap \{\varrho_0 \,|\, \varrho_0 > 0, \log \varrho_0 \in L^\infty(D)\}$ *rispettivamente. Allora esistono un tempo d'arresto* τ *e le variabili aleatorie* v, ϱ *a valori in* $L^\infty(0, T; H^2(D)) \cap L^2(0, T; H^3(D))$ *e* $L^\infty(0, T; H^2(D)) \cap \{\varrho_0 \,|\, \varrho_0 > 0, \log\varrho_0 \in L^\infty([0, T] \times D)\}$ *rispettivamente, tali che*

$$\tau > 0 \quad \text{P-q.s.} \tag{24}$$

(v, ϱ) *è l'unica soluzione del sistema* (1)-(3) *con le condizioni* (7)-(8) *nell'intervallo di tempo* $[0, \tau]$ P-q.s.

PROPOSITION 2. – *Stima dell'energia*

$$E\left(\max_{0 < t \leq T} \|\varrho^{1/2} v\|^2_{L^2(D)}\right) + E\left(\int_0^T \|\nabla v\|^2_{L^2(D)} + \|\lambda^{1/2} \nabla \cdot v\|^2_{L^2(D)}\, dt\right) < \infty \,. \tag{25}$$

PROPOSITION 3. – *Stima della densità*

$$\sup_{0 < t \leq T} \|\varrho\|_{L^p(D)} \leq N p^{2/\beta - 1}, \qquad \forall p > 1 \tag{26}$$

ove N *è una costante che dipende dai dati iniziali del problema.*

(Per alcuni risultati sulle equazioni di un gas viscoso in dimensione 2 o 3 vedi [2]-[5]).

BIBLIOGRAFIA

[1] ANTONTSEV S.N., KAZHIKHOV A.V. and MONAKHOV V.N., *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids* Nauka, Novosibirsk (1983).

[2] LIONS P.L., *Existence globale de solutions pour les equations de Navier-Stokes compressible isentropiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, **316** (1993), 1335-1340.

[3] TORNATORE E. and FUJITA YASHIMA H., *Equazioni monodimensionali di un gas viscoso barotropico con una perturbazione poco regolare*, Annali Univ. Ferrara- Sez. VII- Sc. Mat., Vol. **XL** (1994), 137-168.

[4] TORNATORE E. and FUJITA YASHIMA H., *Equazione stocastica di un gas viscoso barotropico*, in corso di stampa su Ric. di Mat. Napoli.

[5] VAIGANT V.A. and KAZHIKHOV A.V., *On existence of global solutions to the two-dimensional Navier-Stokes equations for a compressible viscous fluid*, Siberian math. J., Vol. **36** (1995), 1283-1316.

Indirizzo: Via Cecco Angiolieri 6 - 90011 Bagheria (PA)
e-mail: Elisa@ipamat.math.unipa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Palermo) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Hisao Fujita Yashima