
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

SABRINA MULINACCI

Valutazione del prezzo delle opzioni Americane: metodi probabilistici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 137–140.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_137_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_137_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Valutazione del prezzo delle opzioni Americane: metodi probabilistici.

SABRINA MULINACCI

Il rapido sviluppo dei mercati finanziari ha portato al sorgere di una svariata gamma di problematiche interessanti da un punto di vista matematico.

In particolare, sta costantemente crescendo di interesse lo studio dei mercati di opzioni.

1. - Nozioni preliminari.

Indichiamo con D lo spazio delle funzioni reali definite in $[0, T]$ continue a destra e con limite sinistro finito.

DEFINIZIONE 1. - *Dati uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una costante $T > 0$ detta «orizzonte» ed una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, un mercato finanziario è costituito da un vettore di processi $(S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)_{t \in [0, T]}$ adattati e con traiettorie in D , che rappresentano gli attivi finanziari «con rischio» presenti sul mercato, e da un processo deterministico S^0 «senza rischio» dato da*

$$S_t^0 = e^{\int_0^t r(s) ds}.$$

Il modello di mercato classicamente studiato è quello di Black-Scholes. In questo modello $r(t) = r$ costante positiva, $d = 1$ e l'unico attivo finanziario $(S_t)_{t \in [0, 1]}$ verifica

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x_0$$

con $\mu, \sigma > 0$ costanti e W un processo di Wiener standard.

Un modello di mercato che rappresenta una generalizzazione del modello di Black-Scholes è quello introdotto da Jeanblanc-Piqué e Pontier nel 1990 (vd. [1])

in cui il processo dei prezzi attualizzati $\tilde{S}_t = e^{-\int_0^t r(s) ds} S_t$ soddisfa

$$(1) \quad d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t - (\sigma(t) dW_t + \phi(t)(dN_t - \lambda(t) dt)), \quad S_0^{(1)} = x_1$$

dove N è un processo di Poisson di intensità $\lambda(t)$ indipendente da W .

DEFINIZIONE 2. - *Una «Opzione Americana» è un contratto che dá il diritto, ma non l'obbligo, di esercitare (eventualmente) una certa operazione finanziaria definita dal suo rendimento h_t e fissata dal contratto, sui $d + 1$ attivi finanziari presenti sul mercato in un qualsiasi istante t entro l'orizzonte finale T fissato.*

I tipi di opzioni più comuni si hanno per $d = 1$ e sono quelle di acquisto, dette *call*, in cui $h_t = (S_t - K)^+$ e quelle di vendita, dette *put*, in cui $h_t = (K - S_t)^+$.

Il valore U_t di una opzione americana in un generico istante $t \in [0, T]$ è dato da

$$U_t = \sup_{\tau \in \mathcal{F}_t, T} \text{ess } \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^\tau r(s) ds} h_\tau \mid \mathcal{F}_t \right].$$

OSSERVAZIONE 1. - $\tilde{U} = \left(e^{-\int_0^t r(s) ds} U_t \right)_{t \in [0, T]}$ è l'inviluppo di Snell di $e^{-\int_0^t r(s) ds} h_t$, ovvero la più piccola supermartingala che maggiore è $e^{-\int_0^t r(s) ds} h_t$.

In generale, è utile approssimare modelli a tempi continui con modelli a tempi discreti in quanto per questi ultimi esiste una formula ricorsiva che fornisce, istante per istante, il valore dell'inviluppo di Snell. Più precisamente: se Y_j , $j = 0, \dots, N$, è un processo a tempi discreti adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_j)_{j=0, \dots, N}$ il suo inviluppo di Snell $(Z_j)_{j=0, \dots, N}$ è dato da

$$\begin{cases} Z_N = h_N \\ Z_j = \max \{ Y_j; \mathbb{E}[Z_{j+1} \mid \mathcal{F}_j] \} & \text{per } j = 0, \dots, N-1. \end{cases}$$

Daltronde, spesso, le approssimazioni ottenute attraverso le discretizzazioni non sono, in generale, definite sullo stesso spazio probabilizzato del modello originario. Risultano quindi di un certo interesse la convergenza in legge e risultati di stabilità dell'inviluppo di Snell rispetto ad essa.

2. - Stabilità funzionale dell'inviluppo di Snell.

I risultati presentati in questo paragrafo sono una generalizzazione di quelli provati da Lamberton e Pagés in [2].

Indichiamo con $(\mathcal{F}_t^Y)$ la più piccola filtrazione che rende adattato il processo Y .

DEFINIZIONE 3. - *Ipotesi (H) (Bremaud-Yor, 1978). Un processo Y adattato ad una filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ soddisfa l'Ipotesi (H) se ogni $(\mathcal{F}_t^Y)$ -martingala è una $(\mathcal{F}_t)$ -martingala.*

Sia $h_t = \psi(t, S_t)$ ed indichiamo con $\Rightarrow^{Sk}$ e con $\Rightarrow^{MZ}$ la convergenza in distribuzione su D rispetto alla topologia di Skorokhod ed a quella di Meyer-Zheng, rispettivamente.

TEOREMA 1. - *Sia S^n una successione di processi stocastici in D tale che $S^n \Rightarrow^{Sk} S$. Indichiamo con J^n i prezzi delle opzioni di rendimento $\psi(t, S_t^n)$. Se:*

- i) *le leggi di S_0^n sono tese;*
- ii) *$\psi(t, x): [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è uniformemente lipschitziana;*
- iii) *le vv.aa. $\psi(\tau, S_\tau^n)$ sono uniformemente integrabili per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $(\mathcal{F}_t^{S^n})$ -t.d.a. τ ;*

iv) $\{S^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica il criterio di tensione L^1 di Aldous;

v) per ogni $(\mathcal{F}_t^{S^n})$ -tempo di arresto τ^n e per ogni legge limite di (S^n, J^n, τ^n) , se (S, J, θ) è il processo canonico su $D^2 \times [0, T]$, il processo S verifica l'ipotesi (H) rispetto a $(\mathcal{F}_t^{S, J, \theta})$.

Allora $(S^n, J^n) \Rightarrow^{Mz} (S, J)$, dove J è l'involuppo di Snell di $\psi(t, S_t)$.

Con alcune ipotesi aggiuntive si ottiene un risultato di stabilità rispetto alla più forte topologia di Skorokhod.

TEOREMA 2. - Siano $J^n = M^n - A^n$ le decomposizioni di Doob-Meyer. Nelle stesse ipotesi del teorema precedente e se, tenuto conto che

$$(S^n, J^n, M^n, A^n) \Rightarrow^{Mz} (S, J, M, A),$$

J verifica l'ipotesi (H) rispetto a $(\mathcal{F}_t^{S, J, M, A})$, allora

$$a) \quad J = M - A$$

$$b) \quad \text{se } J \text{ è continuo, } J^n \Rightarrow^{Sk} J.$$

Questi risultati, insieme ad altri, si trovano in [4].

Un aspetto interessante di questi teoremi è che consentono di ottenere delle approssimazioni dei prezzi anche in contesti non-markoviani, come nel caso delle opzioni Americano-Asiatiche definite da

$$h_t = \psi \left(t, \frac{1}{T_{0t} - T_0} \int_{T_0}^t S_s ds \right)$$

3. - Approssimazione in L^p dell'involuppo di Snell.

Per il modello di Jeanblanc-Piqué e Pontier è possibile ottenere dei risultati di convergenza più forti di quelli visti, in virtù del fatto che i modelli approssimanti vengono costruiti sullo stesso spazio probabilizzato del modello originario.

Consideriamo m , intero positivo, e $\mathcal{P}^m$ una partizione equispaziata di $[0, T]$:

$$\mathcal{P}^m \left\{ (t_0, \dots, t_{2^m}) : 0 = t_0 < \dots < t_{2^m} = T, \quad t_j - t_{j-1} = \Delta_m = \frac{T}{2^m} \right\}.$$

In riferimento alla (1), siano

$$\sigma^m(t) = \sigma(0) \mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{2^m} \sigma(t_{j-1}) \mathbb{I}_{(t_{j-1}, t_j]}(t),$$

$$\phi^m(t) = \phi(0) \mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{2^m} \phi(t_{j-1}) \mathbb{I}_{(t_{j-1}, t_j]}(t).$$

Consideriamo la successione dei processi S^m i cui valori attualizzati $\tilde{S}_t = e^{-\int_0^t r(s) ds} S_t$ verificano

$$d\tilde{S}_t^m = \tilde{S}_t^m \left\{ \sigma^m(t) dW_t + \phi^m(t)(dN_t - \lambda(t) dt) \right\}, \quad \tilde{S}_0^m = x_1.$$

Posto $h_t = \psi(S_t)$, sotto opportune ipotesi sui coefficienti σ , ϕ e λ , valgono i seguenti risultati:

TEOREMA 3. - Sia J^m l'involuppo di Snell di $e^{-\int_0^t r(s) ds} \psi(S_t^m)$ e J quello di $e^{-\int_0^t r(s) ds} \psi(S_t)$. Allora J_t^m converge in $L^p(\mathbb{P})$ a J_t uniformemente rispetto a $t \in [0, T]$ per $p \in [1, +\infty)$.

TEOREMA 4. - Sia $\psi(x)$ lipschitziana, con costante di Lipschitz L . Allora, se

$$C_m = \max \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |\sigma_1(s) - \sigma^m(s)|; \sup_{0 \leq s \leq T} |f_1(s) - \phi^m(s)| \right\},$$

si ha che

$$\mathbb{E}[|J_t - J_t^m|] \leq o(C_m).$$

Se, inoltre, i coefficienti $\sigma_1(t)$ e $\phi_1(t)$ sono lipschitziani e Δ_m è l'ampiezza della partizione $\mathcal{P}^m$ si ha

$$\mathbb{E}[|J_t - J_t^m|] \leq o(\Delta_m).$$

Se si considerano i processi discretizzati $(S_{t_j}^m)_{j=0,1,\dots,m}$ valgono dei risultati analoghi, solo che, in questo caso, si trovano dei risultati sulla velocità di convergenza un po' più deboli: ad esempio nel caso a coefficienti lipschitziani si trova che la velocità di convergenza è almeno dell'ordine di $(\Delta_m^{1/2})$.

I risultati di questo paragrafo si trovano in [3].

BIBLIOGRAFIA

- [1] JEANBLANC-PIQUÉ and PONTIER M., *Optimal portfolio for a Small investor in a Market Model with discontinuous Prices*, Appl. Math. Optim, **22** (1990), 287-310.
- [2] LAMBERTON D. and PAGÉS G., *Sur l'approximation des réduites*, Ann. Inst. Henry Poincaré, **26** (1990), 331-355.
- [3] MULINACCI S., *An approximation of American Option prices in a jump-diffusion model*, Stch. Proc. and Appl., **62** (1996), 1-17.
- [4] MULINACCI S. and PRATELLI M., *Functional convergence of Snell envelopes; applications to America options approximations*, Apparirà su Finance and Stochastics.

Istituto di econometria e matematica per le decisioni economiche
via Necchi 9 - 20123 Milano
e-mail: smulinac@mi.unicatt.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Maurizio Pratelli