Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Stefania Gatti

Una equazione parabolica in teoria della combustione: problemi diretti ed inversi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 117–120.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_117_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 117-120

Una equazione parabolica in teoria della combustione: problemi diretti ed inversi.

Stefania Gatti

In questa tesi, si considera un sistema parabolico semi-lineare in un dominio non limitato con una condizione di Neumann non lineare.

Il modello fisico, che si presenta quando si studi la combustione nei propellenti solidi dei razzi, è un combustibile solido omogeneo semi-infinito che brucia in un recipiente a pressione costante; su tale combustibile non agisce alcuna forza esterna, ad eccezione di un flusso radiante esterno originato esclusivamente da una sorgente d'onda continua (ad esempio un laser), che si deposita in parte sulla superficie che brucia e in parte si distribuisce volumetricamente lungo il solido.

Un sistema di coordinate viene ancorato alla superficie che brucia così che questa corrisponda ad $x = 0$, per $x > 0$ si abbia la fase gassosa e per $x < 0$ la fase condensata.

Il combustibile è adiabatico, eccetto che per $x = 0$; inoltre, si ha attività chimica sulla superficie che brucia e, eventualmente, all'interno del solido, ma si escludono effetti fotochimici. Si osserva che la fase gassosa evolve molto più rapidamente delle altre due regioni, pertanto è possibile considerarla uniforme nel tempo e studiare solo la fase condensata e l'interfaccia solido-gas. Dalle equazioni normalizzate del bilancio dell'energia otteniamo un sistema per la temperatura u.

I risultati ottenuti si possono dividere in due categorie: i primi riguardano due problemi diretti e i secondi due problemi inversi.

Dapprima si considera il sistema in tre dimensioni, supponendo che il mezzo sia opaco, che non abbiano luogo reazioni chimiche internamente al solido e che il fronte di fiamma sia piatto: si ricava così il sistema (1)-(5).

$$\partial_t u = \Delta u - R(u(0, \varrho, \vartheta; t))\, \partial_x u \qquad \text{in } D \times (0, \infty) \tag{1}$$

$$u(x, \varrho, \vartheta; 0) = u_0(x, \varrho, \vartheta) \qquad \text{in } D \tag{2}$$

$$u(-\infty, \varrho, \vartheta; t) = 0 \qquad \text{in } \omega \times (0, \infty) \tag{3}$$

$$\partial_\varrho u(x, \varrho, \vartheta; t) = 0 \qquad \text{in } S_l \times (0, \infty) \tag{4}$$

$$\partial_x u(0, \varrho, \vartheta; t) = p(t) + \mathcal{F}(u(0, \varrho, \vartheta; t)) \qquad \text{in } \omega \times (0, \infty) \tag{5}$$

dove $D \doteq (-\infty, 0) \times \omega = (-\infty, 0) \times (0, l) \times [0, 2\pi)$ rappresenta in coordinate cilindriche un cilindro semi-infinito di $\mathbf{R}^3$ di superficie laterale S_l. Le funzioni R e $\mathcal{F}$ rappresentano, rispettivamente, l'andamento della combustione descritto dalla legge di Arrhenius e il flusso di calore dovuto al calore di ritorno dalla fase gassosa e alle reazioni chimiche sull'interfaccia.

Nel primo risultato originale, supposto che il termine forzante $p(t) = \overline{p}$ sia costante e positivo, abbiamo individuato le regioni di stabilità o di instabilità (del parametro $\overline{p}$) per una soluzione stazionaria $\overline{\theta}(x)$, quando le perturbazioni a cui è soggetta dipendano dalle variabili assiale e radiale; ciò si ottiene applicando il Principio della Stabilità Linearizzata [3] alla formulazione astratta del problema. In seconda istanza, si evidenziano i casi in cui ha luogo una biforcazione di Hopf [3].

Notiamo che, in più dimensioni, la soluzione stazionaria non è necessariamente unica: nel secondo problema diretto si dimostra che, per infiniti valori del parametro $\overline{p}$ esistono soluzioni stazionarie dipendenti dalle variabili radiale ed angolare.

Il problema si vede come un'equazione di biforcazione in opportuni spazî di Banach: studiando l'operatore linearizzato si ottiene, qualora siano soddisfatte le ipotesi del Teorema della funzione implicita, l'unicità locale della soluzione stazionaria; altrimenti, applicando la Teoria di Liapunov-Schmidt [3], si mostra che, qualora l'operatore linearizzato risulti di Fredholm di indice 0, con il nucleo di dimensione 1 e tale da soddisfare una opportuna condizione di trasversalità, dalla soluzione stazionaria $\overline{\theta}(x)$ si biforca una curva di classe C^1 di soluzioni stazionarie; inoltre, tale curva ammette una rappresentazione cartesiana con base nel nucleo dell'operatore linearizzato, a cui appartengono funzioni dipendenti anche dalle variabili radiale ed angolare.

Nella seconda parte della tesi, si considera il seguente sistema relativo al modello in una dimensione: oltre alla temperatura u, è incognita anche la funzione a:

$$\partial_t u - \partial_x^2 u + R(u(0, t))\partial_x u = a(u) + f \qquad x < 0, \quad t > 0 \tag{6}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad x \leqslant 0 \tag{7}$$

$$u(-\infty, t) = 0 \qquad t \geqslant 0 \tag{8}$$

$$\partial_x u(0, t) = p(t) + \mathcal{F}(u(0, t)) \quad t \geqslant 0 \tag{9}$$

dove a rappresenta le reazioni chimiche nel solido e f la porzione del flusso esterno che si distribuisce volumetricamente nella fase condensata. Per prima cosa, viene esaminato il problema inverso che si ottiene aggiungendo al precedente sistema la condizione supplementare

$$u(0, t) = h(t) \qquad t > 0 \tag{10}$$

e considerando come dati la terna (p, h, f); una soluzione del problema inverso (6)-(10) è una coppia (u, a).

Si dimostra che, se si assume una condizione di Cauchy omogenea (cioè se $u_0 = 0$), la mappa che ai dati associa il termine non lineare a risulta Hölder continua, a patto che la derivata prima della funzione h sia sufficientemente grande.

Per pervenire a questo risultato, si deve far sì che la mappa *dati* $\longrightarrow$ *termine non lineare* a sia una funzione: infatti è banale notare che, poiché a interviene solo sull'immagine di u, $\mathcal{R}(u)$, se (u, a) è soluzione di (6)-(10) e $\overline{a}$ è una funzione abbastanza regolare che coincide con a su $\mathcal{R}(u)$, allora anche $(u, \overline{a})$ è soluzione del problema inverso; allo scopo di rendere la mappa sia univoca che «regolare», restringeremo opportunamente l'insieme dei termini non lineari ammissibili.

Infatti, grazie al principio del massimo per dominî illimitati [4], è possibile determinare a priori l'immagine di u soluzione del problema diretto (6)-(8),(10) e quindi definire a solo su tale insieme che risulta essere $\mathcal{R}(u) = [0, h(T)]$.

Quindi, supponendo a fissato ed applicando risultati classici [2] al problema (6)-(9), otterremo una rappresentazione integrale di u in cui la funzione h interviene soltanto nella definizione del dominio del termine a, dominio che è appunto $[0, h(T)]$.

Valendoci del Teorema della contrazione e di stime per la soluzione fondamentale dell'equazione del calore in un mezzo semi-infinito [1], ricaveremo risultati qualitativi per la soluzione del problema (6)-(9) in sostanza prescindendo dalla funzione h.

La condizione (10) interviene soltanto in ultima istanza nello studio della stabilità che beneficia delle stime precedentemente ricavate per la soluzione del problema (6)-(9).

Infine, si considera un sistema simile al precedente a parte la condizione iniziale che si suppone non omogenea:

$$\partial_t u - \partial_x^2 u + R(u(0, t))\, \partial_x u = a(u) + f \qquad \text{in } \Omega_T \tag{11}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \leqslant 0 \tag{12}$$

$$u(-\infty, t) = 0, \qquad t \in [0, T] \tag{13}$$

$$\partial_x u(0, t) = p(t) + \mathcal{F}(u(0, t)), \qquad t \in [0, T] \tag{14}$$

$$u(0, t) = h(t), \qquad t \in [0, T] \tag{15}$$

$$a(\tau) = a_0(\tau), \qquad \text{in } \mathcal{R}(u_0) \tag{16}$$

dove $\Omega_T \doteq (-\infty, 0) \times (0, T)$.

Si noti che la condizione (16) è necessaria perché dalle prime cinque equazioni non è possibile determinare a su tutta l'immagine di u, che indichiamo ancora con $\mathcal{R}(u)$.

Applicando principalmente, il Teorema di punto fisso di Schauder e inclusioni compatte per gli spazî di Hölder, abbiamo dimostrato un teorema di esistenza locale per le soluzioni (u, a) del problema inverso che ha come dati le funzioni (p, h, f, u_0, a_0).

Inizialmente, si procede come nel precedente problema inverso, cioè, dopo avere determinato a priori l'immagine di u, questa volta in termini di h

e del dato iniziale u_0, si considerano solo funzioni a ottenute estendendo a tutto $\mathbf{R}$ funzioni opportunamente regolari definite sull'immagine di u.

Si opera, quindi, una trasformazione che porta il termine non lineare a nelle condizioni al bordo e si ricava così una espressione integrale di a che ci consente di eliminare tale funzione da (11)-(15).

Dopo una serie di passaggi, si ottiene un sistema di equazioni integrali di Volterra che risolviamo applicando il Teorema di punto fisso di Schauder: la compattezza dell'operatore integrale segue anche dalle inclusioni compatte tra spazî di Hölder anisotropi.

BIBLIOGRAFIA

[1] FRIEDMAN A., *Partial Differential Equations of Parabolic type*, Prantice Hall (1964).
[2] LADYŽENSKAYA O.A., SOLONNIKOV V.A. and URAL'CEVA N.N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic type*, Transl. of Math. Monographs Amer. Math. Soc. (1986).
[3] LUNARDI A., *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Springer Verlag (1995).
[4] PROTTER M.H. and WEINBERGER H.F., *Maximum Principles in Partial Differential Equations*, Prantice Hall (1967).

Dipartimento di Matematica - Politecnico di Milano
e-mail: gatti@vmimat.mat.unimi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. C. D. Pagani