Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Roberta Fabbri

Genericità dell'iperbolicità nei sistemi differenziali lineari di dimensione due

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 109–111.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_109_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 109-111

Genericità dell'iperbolicità nei sistemi differenziali lineari di dimensione due.

ROBERTA FABBRI

Nella tesi di dottorato è stato studiato il problema della genericità del comportamento iperbolico per sistemi differenziali di dimensione due con coefficienti quasi periodici definiti sul toro T^k con $k \geqslant 3$. Per valutare tale comportamento si è preso in esame:

i) la positività dell'esponente di Lyapunov associato a tali sistemi;
ii) l'esistenza di una dicotomia esponenziale (D.E.) per le soluzioni di tali equazioni.

Nella tesi vengono studiati entrambi gli aspetti di tale comportamento iperbolico e vengono ricavati per essi alcuni risultati.

Rilevanti per questa tesi sono stati i lavori di Millionščikov e dei suoi collaboratori [6] [7] [8] e particolarmente quelli in cui viene trattata la dimostrazione dell'esistenza di equazioni differenziali quasi periodiche di dimensione due che ammettono esponente di Lyapunov positivo ma non D.E., ed altri in cui viene trattata l'instabilità di questo fenomeno. Da citare pure i risultati di Mañé [4] [5] che ha trattato l'iperbolicità dell'applicazione tangente relativa ad un diffeomorfismo C^1 su una varietà di dimensione due.

Ricordiamo infine i lavori [2] [3] di R. Johnson: in [2] viene dimostrata la genericità della D.E. per equazioni differenziali lineari e Hamiltoniane di dimensione due, quasi periodiche con due frequenze fondamentali; in [3] si fa vedere come il problema della genericità della D.E. sia strettamente collegato al fenomeno dello spettro di Cantor per l'operatore di Schrödinger quasi periodico.

Motivata dai lavori suddetti e da [1] mi sono occupata di sistemi differenziali lineari di dimensione due con almeno tre frequenze fondamentali; si fa notare come la presenza di tre frequenze ponga delle difficoltà non presenti nel caso $k = 2$.

In dettaglio si è considerato un sistema del tipo:

$$\underline{x}' = A(\tau_\psi(\psi))\,\underline{x} \tag{1}$$

con $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$, $A\colon \mathrm{T^k} \to sl(2;\mathbb{R})$ di classe C^r con $r \geqslant 0$ e $\tau_t\colon \mathrm{T^k} \to \mathrm{T^k}$ rotazione quasi periodica sul toro $\mathrm{T^k}$ definita da:

$$\tau_t(\psi) = \psi + \gamma t, \qquad \psi \in \mathrm{T^k}, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad \gamma \in \mathbb{R}^k. \tag{2}$$

Quello che si vuole trattare è l'iperbolicità del cociclo associato al problema dato, cociclo che è dato dalla matrice fondamentale delle soluzioni generate dalle equazioni differenziali considerate.

Notiamo come il concetto di D.E. per le soluzioni di un sistema differenziale sia legato allo spettro dell'operatore autoaggiunto H_ψ associato al problema assegnato.

Si prenda

$$\underline{x}' = A(\tau_t(\psi) + EJ)\,\underline{x} \tag{3}$$

con $E \in \mathbb{R}$ e $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e si consideri il problema spettrale associato

$$H_\psi \underline{x} = E\underline{x}$$

dove $H_\psi = J^{-1}[d/dt - A(\psi + \gamma t)]$ indica l'operatore autoaggiunto in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ corrispondente al problema considerato.

Si ha che $E \in \mathbb{C}$ è nel risolvente di $H_\psi \Leftrightarrow$ le equazioni che determinano il sistema (3) ammettono una D.E.[2].

Per arrivare ai risultati proposti nella tesi ci si è occupati anche dello studio del segno dell'esponente di Lyapunov $\beta = \beta(E)$ associato al sistema (3).

Se esiste D.E. per un valore $E = E_*$ per il sistema $\underline{x}' = (A + EJ)\,\underline{x}$ si ha che $\beta(E_*) > 0$. Il viceversa non è in generale vero come provano i lavori di Mañé.

Indicato con $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$ l'insieme dei vettori delle frequenze razionalmente indipendenti e con C^r l'insieme $C^r(\mathrm{T}^k, sl(2; \mathbb{R}))$ costituito dalle funzioni di classe C^r definite su T^k a valori nell'algebra $sl(2; \mathbb{R})$, si ponga $W_r = \Gamma \times C^r$. I risultati fondamentali mostrati sono i seguenti:

TEOREMA 1. – *Sia* $r \in [0, \infty)$. *L'insieme* $\{w = (\gamma, A) \in W_r \mid$ *l'esponente di Lyapunov* $\beta(\gamma, A)$ *del sistema* $\underline{x}' = A(\psi + \gamma t)\,\underline{x}$ $(\psi \in \mathrm{T}^k)$ *è positivo*$\}$ *è denso in* W_r.

Notiamo che qui r può assumere qualsiasi valore finito, mentre in passato il caso $r \geqslant 1$ non era stato mai considerato.

Definiamo ora:

$$D_r = \{w \in W_r \mid \underline{x}' = A(\psi + \gamma t)\,\underline{x} \text{ ammette una D.E. per un punto } \psi \in \mathrm{T}^k \text{ (e dunque } \forall \psi \in \mathrm{T}^k)\}.$$

Si ha allora:

TEOREMA 2. – *Consideriamo* $0 \leqslant r < 1$.

Esiste un sottoinsieme residuo $W_* \subset W_r$ *con la seguente proprietà: se* $w = (\gamma, A) \in W_*$, *allora il sistema* $\underline{x}' = A(\psi + \gamma t)\,\underline{x}$ *ammette una D.E. oppure l'esponente di Lyapunov associato* $\beta(w)$ *è uguale a zero.*

Abbiamo infine

TEOREMA 3. – *Sia* $r = 0$. *L'insieme* $D_0 \subset W_0$ *è aperto e denso in* W_0.

I metodi usati nella tesi derivano dalla Teoria Ergodica, dalla Dinamica Topologica, dall'Analisi Funzionale e dalla Teoria delle Equazioni Differenziali. Come strumento privilegiato di indagine è stato usato il numero della rotazione associato al problema dato sfruttando le proprietà del quale si sono avute informazioni riguardo lo studio del problema spettrale equivalente al sistema considerato.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHULAEVSKY V. and SINAI YA., *Anderson Localization for the I-D. Discrete Schrödinger Operators with Two-Frequency Potential*, Comm. Math. Phys., **125** (1989), 91-112.

[2] JOHNSON R., *Hopf bifurcation from non periodic solutions of differential equations I.Linear Theory*, Journ. Dyn. Diff. Eqns, **1** (1989), 179-198.

[3] JOHNSON R., *Cantor Spectrum for the Quasi-periodic Schrödinger Equation*, Journ. of Diff. Eqns, **91** (1991), 88-110.

[4] MAÑÉ R., *Oseledec's Theorem from the Generic Viewpoint*, Proc.Int. Congr. Math. (1983, Warsaw), 1269-1276.

[5] MAÑÉ R.,*The Lyapunov exponents of generic area preserving diffeomorphisms*, Manoscritto (1984).

[6] MILLIONŠČIKOV V., *Proof of the existence...almost periodic coefficients*, Diff. Eqns, **4** (1968), 203-205.

[7] MILLIOŇČIKOV V., *Typicality of almost reducible systems with almost periodic coefficients*, Diff. Eqns, **14** (1978), 448-450.

[8] VINOGRAD R., *A problem suggested by N.P.Erugin*, Diff. Eqns., **11** (1975), 474-478.

Indirizzo: V. Gramsci 35 - 47016 Predappio (Fo)
e-mail: fabbri@alibaba.math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. R. Johnson