
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MAURIZIO CHICCO

**Principio di massimo forte per
sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo
variazionale.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 22
(1967), n.3, p. 368–372.

Zanichelli

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_368_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_368_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale.

MAURIZIO CHICCO (Genova) (*)

Summary. - *We prove a strong maximum principle for positive subsolutions of second order elliptic partial differential equations in divergence form.*

Notazioni e premesse.

Le seguenti ipotesi saranno fatte costantemente nel seguito, senza esplicita menzione. Sia Ω un insieme aperto limitato e connesso di R^n ; siano $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $b_i \in L_n(\Omega)$, $d_i \in L_n(\Omega)$, $c \in L_{n/2}(\Omega)$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq \nu |\lambda|^2$ con ν costante positiva, $c - \sum_{i=1}^n (d_i)_{x_i} \geq 0$ nel senso delle distribuzioni,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i} v + d_i u v_{x_i}) + cv \right\} dx$$

$$a'(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v \right\} dx.$$

Sia $C^1(\bar{\Omega})$ lo spazio delle funzioni continue colle derivate prime nella chiusura di Ω , $C_0^1(\Omega)$ lo spazio delle funzioni di $C^1(\bar{\Omega})$ a supporto compatto contenuto in Ω , $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ i completamenti rispettivamente di $C^1(\bar{\Omega})$ e di $C_0^1(\Omega)$ secondo la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Dato un numero reale k , si dice che $u \leq k$ su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$ se esiste una successione $u_j \in C^1(\bar{\Omega})$ tale che $u_j \leq k$ su $\partial\Omega$ (per ogni j) e $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u - u_j\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Si definisce poi il massimo di u su $\partial\Omega$ nel senso di $H^1(\Omega)$ nel modo seguente:

$$\max_{\partial\Omega}^* u = \inf \{ k : u \leq k \text{ su } \partial\Omega \text{ nel senso di } H^1(\Omega) \}.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

La forma $a(u, v)$ si dice coercitiva su $H_0^1(\Omega)$ se esiste una costante positiva h tale che

$$a(v, v) \geq h \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega).$$

G. STAMPACCHIA ha dimostrato i teoremi seguenti (vedi [1], teoremi 3.6 e 7.1):

TEOREMA 1. - Sia $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leq 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$. Valga inoltre almeno una delle seguenti ipotesi:

- 1) — la forma $a(u, v)$ è coercitiva su $H_2^1(\Omega)$
- 2) — risulta $c - \sum_{i=1}^n (d_i)_{x_i} \geq c_0$ nel senso delle distribuzioni, ove c_0 è una costante positiva.

Allora si ha

$$\text{ess sup}_{\Omega} u \leq \max(0, \max_{\partial\Omega}^* u).$$

TEOREMA 1'. - Sia $w \in H^1(\Omega)$, $a'(w, v) = 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$. Allora se w assume il suo massimo in un punto interno ad Ω , w è costante in Ω .

(La tesi ha senso perchè, nelle ipotesi del teorema, la funzione w si può supporre continua in Ω : vedi [1], teorema 7.1).

Scopo del presente lavoro è dimostrare un risultato analogo alla tesi del teorema 1' per le soluzioni positive della disequazione

$$a(u, v) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega), \quad v \geq 0.$$

In tal modo il teorema 1 resta provato anche senza le ipotesi 1) e 2).

Ciò viene fatto nel teorema 2.

Premettiamo la seguente

DEFINIZIONE 1. - Sia $u \in H^1(\Omega)$, $\text{ess sup}_{\Omega} u = M$. Un punto $x_0 \in \bar{\Omega}$ si dice punto di massimo per u se per ogni intorno aperto U di x_0 risulta

$$\text{ess sup}_{U \cap \Omega} u = M.$$

OSSERVAZIONE. - È facile verificare che esiste in $\bar{\Omega}$ almeno un punto di massimo per u secondo la definizione precedente.

LEMMA. - Sia $u \in H^1(\Omega)$, $u \geq 0$ quasi ovunque in Ω , $a(u, v) \leq 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$. Sia A un aperto contenuto in Ω e tale

che la forma $a(u, v)$ sia coercitiva su $H_0^1(A)$. Sia z_A la soluzione del problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} a'(z_A, v) = 0 & \text{per ogni } v \in H_0^1(A) \\ z_A - u \in H_0^1(A). \end{cases}$$

Allora risulta $u \leq z_A$ quasi ovunque in A .

DIMOSTRAZIONE. - Posto $\bar{u} = \max(u - z_A, 0)$, risulta $\bar{u} \in H_0^1(A)$, $\bar{u} \geq 0$ in A e quindi, con facili calcoli:

$$\begin{aligned} 0 &\geq a(u, \bar{u}) - a'(z_A, \bar{u}) = \\ &= \int_A \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u - z_A)_{x_i} \bar{u}_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(u - z_A)_{x_i} \bar{u} + \left[c - \sum_{i=1}^n (d_i)_{x_i} \right] u \bar{u} \right\} dx \geq \\ &\geq \int_A \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \bar{u}_{x_i} \bar{u}_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \bar{u}_{x_i} \bar{u} \right\} dx \geq \text{cost.} \|\bar{u}\|_{H_0^1(A)}^2. \end{aligned}$$

Ciò prova che $\bar{u} = 0$ q.o. in A , cioè che $u \leq z_A$ q.o. in A , c.v.d.

TEOREMA 2. - Sia $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leq 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$; ess $\sup_{\Omega} u = M$, $0 < M < +\infty$.

Allora vale una ed una sola delle seguenti alternative:

1) I punti di massimo di u (nel senso della definizione 1) sono tutti sulla frontiera di Ω .

2) $u = M$ quasi ovunque in Ω , $c - \sum_{i=1}^n (d_i)_{x_i} = 0$ nel senso delle distribuzioni, $a(u, v) = 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

DIMOSTRAZIONE. - Non è restrittivo supporre che sia $u \geq 0$, poichè in caso contrario si ragiona sulla funzione $\max(u, 0)$.

Supponiamo che esista un punto x_0 di massimo per u interno ad Ω e facciamo vedere che vale l'alternativa 2. Sia S una sfera di centro x_0 e di raggio r_0 abbastanza piccolo in modo che S sia contenuta in Ω e che la forma $a'(u, v)$ sia coercitiva su $H_0^1(S)$ (teorema 3.1 di [1]).

La soluzione z_S del problema di DIRICHLET

$$(1) \quad a'(z_S, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(S)$$

$$(2) \quad z_S - u \in H_0^1(S)$$

esiste unica (teorema 3.3 di [1]) e si può supporre continua in S (teorema 7.1 di [1]). Per il lemma precedente risulta

$$(3) \quad u \leq z_S \text{ quasi ovunque in } S.$$

Poichè $u \leq M$ q.o. in Ω , si ha (per regolarizzazione)

$$(4) \quad \max_{\partial S}^* u \leq M$$

ove «max*» indica il massimo nel senso di $H^1(\Omega)$.

Inoltre per il principio di massimo debole (teorema 3.6 di [1])

$$(5) \quad M \leq \max_{\partial S}^* u.$$

Dalle (2), (4), (5) si ricava

$$(6) \quad \max_{\partial S}^* z_S = M$$

e per il teorema 1 vale una ed una sola delle seguenti alternative:

$$(7) \quad z_S < M \text{ in } S$$

$$(8) \quad z_S = M \text{ in } S.$$

Facciamo vedere che la (7) non può verificarsi. Infatti, sia U un qualunque aperto tale che $x_0 \in U$ e $\bar{U} \subset S$; per la (7) e per la continuità di z_S risulta

$$(9) \quad \text{ess sup}_U z_S < M$$

e poichè x_0 è punto di massimo per u :

$$(10) \quad \text{ess sup}_U u = M.$$

Le (9), (10) sono in contrasto con la (3) ed è quindi assurdo che valga la (7). Si verifica quindi la (8) la quale, insieme alla (2), implica

$$(11) \quad u = M \text{ su } \partial S \text{ (nel senso di } H^1(\Omega)\text{)}.$$

Poichè tutto si può ripetere per le sfere $S(x_0, r)$ con $r < r_0$, ne viene

$$(12) \quad u = M \text{ quasi ovunque in } S.$$

(Ciò si dimostra facilmente per assurdo applicando il teorema di Egoroff ad una successione $v_j \in C^1(\bar{\Omega})$ convergente ad u in $H^1(\Omega)$).

Come subito si verifica, la (12) basta per concludere che $u = M$ quasi ovunque in Ω , ed in tal caso è ovviamente $c - \sum_{i=1}^n (d_i)_{x_i} = 0$ nel senso delle distribuzioni e $a(u, v) = 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

c.v.d.

Il teorema 2 si può estendere al caso in cui $\text{ess sup } u = +\infty$ nel modo seguente:

COROLLARIO. - Sia $u \in H^1(\Omega)$, $a(u, v) \leq 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$; $\text{ess sup } u = +\infty$.

Allora i punti di massimo per u (nel senso della definizione 1) sono sulla frontiera di Ω .

DIMOSTRAZIONE. - Si può ragionare per assurdo ripetendo la dimostrazione del teorema precedente, oppure applicare il teorema 5.1 di [1] che fornisce immediatamente la tesi.

c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 15, 1 (1965), pag. 189-258.

*Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.
il 27 maggio 1967*