Bollettino
Unione Matematica Italiana

Mario Servi

Limiti diretti di spazi topologici generalizzati.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.3, p. 363–367.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_363_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Limiti diretti di spazi topologici generalizzati.

MARIO SERVI (Parma) (*).

Sunto. - *Si dà una definizione generale di* l i m i t e d i r e t t o *per una famiglia di strutture di una data specie e si dimostra che gli spazi topologici generalizzati (di specie F, V, V_D, V_α, $V_{\alpha,D}$) ammettono limiti diretti.*

Premessa.

Sia Λ un insieme totalmente ordinato e sia $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di s p a z i t o p o l o g i c i con $\mathcal{T}_\lambda$ insieme degli aperti di S_λ, tali che se $\mu \leq \lambda$, sia $S_\mu \subseteq S_\lambda$ e l'inclusione $f_{\mu,\lambda} : S_\mu \subseteq S_\lambda$ sia continua. Si chiama allora *limite diretto* della famiglia lo spazio $(S, \mathcal{T})$, dove

$$S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \quad \text{e} \quad \mathcal{T} = \{ U \in \mathcal{P}(S) : U \cap S_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda, \ \forall \lambda \in \Lambda \}.$$

Indicata, per ciascun $\lambda \in \Lambda$, con f_λ l'inclusione $S_\lambda \to S$, si ha:

(i) *$\mathcal{T}$ è una topologia.* È facile infatti verificare che l'intersezione di due aperti è aperta, così come l'unione di una qualunque famiglia di aperti;

(ii) *le f_λ sono tutte continue.* Ovvio, perchè $f_\lambda^{-1}(U) = U \bigcup S_\lambda$;

(iii) *sia X uno spazio topologico e sia $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di funzioni continue, $g_\lambda : S_\lambda \to X$ tali che se $\lambda \leq \mu$, $g_\mu \circ f_{\lambda,\mu} = g_\lambda$. Esiste allora ed è unica la funzione continua $g : S \to X$ tale che $g_\lambda = g \circ f_\lambda$ (essa è data da $g : x \leadsto g_\lambda x$,* se $x \in S_\lambda$).

La situazione ora descritta giustifica le seguenti considerazioni che ne costituiscono una generalizzazione.

1. - Limite diretto di insiemi rispetto alle inclusioni.

Sia Λ un insieme filtrante superiormente (*upward directed set*, Cfr. ad es. [2], pag. 113) e sia $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di insiemi tali

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca Matematico n. 37 del C.N.R., nell'anno 1966-67.

che $\lambda \leq \mu \Rightarrow S_\lambda \subseteq S_\mu$, $\lambda, \mu \in \Lambda$. Poniamo $f_{\lambda,\mu} : S_\lambda \subseteq S_\mu$, $S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$, $f_\lambda : S_\lambda \subseteq S$. Sia dato ora un insieme E ed una funzione $g : S \to E$. Posto $g_\lambda = g \circ f_\lambda$, la famiglia $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ gode della seguente proprietà:

$$\lambda \leq \mu \Rightarrow g_\mu \circ f_{\lambda,\mu} = g_\lambda, \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda). \tag{1}$$

Viceversa, data una famiglia $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ soddisfacente la (1), esiste una ed una sola funzione $g : S \to E$ tale che $g_\lambda = g \circ f_\lambda$. Essa è data da

$$g : x \leadsto g_\lambda x, \quad \text{se} \quad x \in S_\lambda. \tag{2}$$

La (2) è ben data, perchè Λ è filtrante. Sia infatti $x \in S_\lambda \cap S_\mu$. Sappiamo allora che $\exists\, \nu \in \Lambda$ tale che $\lambda, \mu \leq \nu$. Ne segue $g_\lambda = g_\nu \circ f_{\lambda,\nu}$ $g_\mu = g_\nu \circ f_{\mu,\nu}$ e quindi $g_\lambda x = g_\mu x$.

2. – Limite diretto di strutture di una data specie.

Supponiamo ora che gli insiemi S_λ siano dotati di strutture $\mathfrak{S}_\lambda$ di una data specie Σ e sia σ una classe di morfismi per Σ. Per restare nell'ordine di idee di Bourbaki [1], diremo che una struttura di specie Σ su S è il *limite diretto* della famiglia data, se essa è struttura finale per la famiglia $(S_\lambda, \mathfrak{S}_\lambda, f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Equivalentemente se:

1) le inclusioni $f_\lambda : S_\lambda \to S$ sono morfismi;

2) data una funzione $g : S \to E$, dove E è munito di struttura di specie Σ, se le $g \circ f_\lambda$ sono morfismi, anche g lo è.

3. – Limite diretto di spazi top-gen (rispetto alle inclusioni).

Ci proponiamo ora di studiare il caso che Σ sia una delle specie di strutture di spazio top-gen e σ la classe delle applicazioni «continue» (ved. Servi [3] e bibliografia ivi riportata).

3.1. – Caso F.

Σ sia ora la specie di struttura di spazio top-gen di tipo F e $\boldsymbol{K}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\boldsymbol{K}_E$ siano gli operatori chiusura sugli S_λ e su E rispettivamente. Per ogni $X \subseteq S$, sia $\Delta(X) = \{\lambda \in \Lambda : X \subseteq S_\lambda\}$. Si definisca ora $\boldsymbol{K}$ su S come segue:

$$\boldsymbol{K}X = X, \quad \text{se} \quad \Delta(X) = \emptyset; \qquad \boldsymbol{K}X = \bigcup_{\lambda \in \Delta(X)} \boldsymbol{K}_\lambda X, \quad \text{altrimenti}. \tag{3}$$

Si verifica subito che il $\boldsymbol{K}$ così definito è un F-operatore. Si ha poi:

1) le f_λ sono continue. Infatti, sia $X \subseteq S_\lambda$, quindi $\lambda \in \Delta(X)$; allora

$$f_\lambda \boldsymbol{K}_\lambda X = \boldsymbol{K}_\lambda X \subseteq \bigcup_{j \in \Delta(X)} \boldsymbol{K}_j X = \boldsymbol{K}X = \boldsymbol{K} f_\lambda X;$$

2) sia $g: S \to E$ e supponiamo che per ogni $\lambda \in \Lambda$, $g \circ f_\lambda$ sia continua, cioè (tenuto conto che le f_λ sono inclusioni) $g\boldsymbol{K}_\lambda X \subseteq \boldsymbol{K}_E gX$, $(X \subseteq S)$. Dobbiamo dimostrare che anche g è continua, cioè $g\boldsymbol{K}X \subseteq \boldsymbol{K}_E gX$, $(X \subseteq S)$. Questa, se $\Delta(X) = \emptyset$ segue immediatamente dal fatto che $\boldsymbol{K}_E$ è un F-operatore. Altrimenti, da $\lambda \in \Delta(X)$ segue $g\boldsymbol{K}_\lambda X \subseteq \boldsymbol{K}_E gX$ e quindi $g\boldsymbol{K}X = g \bigcup_{\lambda \in \Delta(X)} \boldsymbol{K}_\lambda X = \bigcup_{\lambda \in \Delta(X)} g\boldsymbol{K}_\lambda X \subseteq \boldsymbol{K}_E gX$.

In conclusione, $(S, \boldsymbol{K})$ è il limite diretto (secondo la definizione data sopra) della data famiglia.

3.2. - Caso $V(V_D)$.

Si definisca $\boldsymbol{K}$ su S come segue.

$$\boldsymbol{K}X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \boldsymbol{K}_\lambda (X \cap S_\lambda), \qquad (X \subseteq S). \tag{4}$$

Si verifica facilmente che $\boldsymbol{K}$ è di tipo V (di tipo V_D) se tali sono tutti i $\boldsymbol{K}_\lambda$. Si dimostra anche facilmente che sono soddisfatte le condizioni 1) e 2). Dunque, anche le specie di struttura di spazio di tipo V e di tipo V_D ammettono limiti diretti.

3.3. - Caso V_α.

Sia $\boldsymbol{K}_\alpha$ l'α-associato a $\boldsymbol{K}$, cioè il più fine V_α-operatore meno fine di $\boldsymbol{K}$ (per la sua esistenza, cfr. ad es. [3]), e verifichiamo che $(S, \boldsymbol{K}_\alpha)$ è il limite diretto della data famiglia, nel caso che tutti i $\boldsymbol{K}_\lambda$ siano di tipo V_α e $\boldsymbol{K}$ sia definito dalla (4). È immediato verificare che tutte le f_λ sono ancora continue; per verificare che g è continua quando lo sono tutte le $g \circ f_\lambda$, definiamo su S un operatore, $\boldsymbol{K}'$, come segue: $\boldsymbol{K}' = g^{-1}\boldsymbol{K}_E g$. È facile verificare che $\boldsymbol{K}'$ è un V_α-operatore tale che $\boldsymbol{K}X \subseteq \boldsymbol{K}'X$; per la definizione di $\boldsymbol{K}_\alpha$, segue allora che $\boldsymbol{K}_\alpha \leq \boldsymbol{K}'$, cioè $\boldsymbol{K}_\alpha \leq g^{-1}\boldsymbol{K}_E g$, da cui si ricava subito $g\boldsymbol{K} \leq \boldsymbol{K}_E g$, cioè g è continua.

4. - Limite diretto di insiemi rispetto a funzioni qualunque.

Vogliamo generalizzare le considerazioni precedenti al caso che le $f_{\lambda,\mu}$ non siano più inclusioni. Precisamente, sia Λ un insieme filtrante superiormente, sia $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di insiemi e per ogni coppia $\lambda, \mu \in \Lambda$ tale che $\lambda \leq \mu$, sia $f_{\lambda,\mu}: S_\lambda \to S_\mu$ una funzione con la proprietà che

$$\lambda \leq \mu \leq \nu \Rightarrow f_{\mu,\nu} \circ f_{\lambda,\mu} = f_{\lambda,\nu} \quad \text{ed inoltre} \quad f_{\lambda,\lambda} = 1_{S_\lambda}. \tag{5}$$

Ci domandiamo se esiste un insieme S ed una famiglia di funzioni $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tali che $f_\lambda : S_\lambda \to S$, $f_\lambda \circ f_{\lambda,\mu} = f_\lambda$ $(\lambda \leq \mu)$ e tali che, comunque dato un insieme E ed una famiglia $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di funzioni con la proprietà

$$g_\lambda : S_\lambda \to E \quad \text{e} \quad g_\mu \circ f_{\lambda,\mu} = g_\lambda \qquad (\lambda \leq \mu). \tag{6}$$

esista e sia unica la funzione $g : S \to E$ tale che $g \circ f_\lambda = g_\lambda$.

La risposta è affermativa e la costruzione di S e delle f_λ procede come segue. Sia $S^\frown$ l'unione disgiunta della data famiglia di insiemi, che, per semplicità, supponiamo addirittura *disgiunti a due a due*. Definiamo poi su $S^\frown$ la seguente relazione ρ:

$$x\rho y \text{ se e solo se } \exists \nu \geq \mu, \lambda \text{ tale che } f_{\mu,\nu}x = f_{\lambda,\nu}y \qquad (x \in S_\mu,\ y \in S_\lambda). \tag{7}$$

Si dimostra agevolmente che ρ è di equivalenza. Poniamo infine

$$S = S^\frown/\rho \quad \text{ed} \quad f_\lambda x = [x] \qquad (x \in S_\lambda) \tag{8}$$

e dimostriamo che sono soddisfatte tutte le proprietà desiderate.

1) $f_\mu \circ f_{\lambda,\mu} = f_\lambda$, se $\lambda \leq \mu$. Infatti, se $\lambda \leq \mu$, è $x\rho f_{\lambda,\mu}x$, $\forall\, x \in S_\lambda$ (si prenda $\nu = \mu$). Ne segue l'uguaglianza voluta.

2) Siano E e $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ come sopra. Si definisca g come segue. Se $x \in S_\lambda$, $g[x] = g_\lambda x$. Mostriamo che la definizione è lecita, cioè che se $[x] = [y]$, con $x \in S_\lambda$ ed $y \in S_\mu$, allora $g_\lambda x = g_\mu y$. Sia infatti $\nu \geq \lambda, \mu$ tale che $f_{\lambda,\nu}x = f_{\mu,\nu}y$. Si ha: $g_\lambda x = g_\nu \circ f_{\lambda,\nu}x = g_\nu \circ f_{\mu,\nu}y = g_\mu y$. Si ha inoltre $g \circ f_\lambda x = g[x] = g_\lambda x$, cioè $g \circ f_\lambda = g_\lambda$. Infine l'unicità di g si dimostra così: se g' è tale che $g' \circ f_\lambda = g_\lambda$, allora si ha $g'[x] = g' f_\lambda x = g_\lambda x = g[x]$.

5. - **Limite diretto di strutture.**

Se ciascun insieme S_λ è munito di una struttura $\mathfrak{S}_\lambda$ di specie Σ e ciascuna $f_{\lambda\mu}$ è un morfismo, definiamo come struttura limite diretto su S una struttura $\mathfrak{S}$ (se esiste) che sia «finale» per la famiglia $(S_\lambda, \mathfrak{S}_\lambda, f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tale cioè che le f_λ siano morfismi e che comunque dato un insieme E dotato di una struttura di specie Σ e comunque dati dei *morfismi* g_λ soddisfacenti la (6), anche la g definita nel precedente paragrafo sia un morfismo. Per quanto riguarda gli spazi top-gen, si possono generalizzare i risultati del n. 3. Precisamente si definiscano su S gli operatori $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K}'$ nel seguente modo. Per ogni $X \subseteq S$ sia

$$\Delta(X) = \{\, \lambda \in \Lambda :\ X = f_\lambda f_\lambda^{-1} X \,\}.$$

$\boldsymbol{K}X = X$, se $\Delta(X) = \emptyset$; $\boldsymbol{K}X = \bigcup_{\substack{\lambda \in \Delta(X) \\ f_\lambda Z = X}} f_\lambda \boldsymbol{K}_\lambda Z$, altrimenti. $\boldsymbol{K}'X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \boldsymbol{K}_\lambda f^{-1} X$ $(X \subseteq S)$. Nel caso F, $(S, \boldsymbol{K})$ è lo spazio desiderato; nei casi V e V_D è $(S, \boldsymbol{K}')$, infine nel caso V_α lo spazio limite diretto è $(S, \boldsymbol{K}'_\alpha)$. La verifica si conduce con tecnica simile a quella relativa alle inclusioni svolta nel paragrafo 3, e pertanto la omettiamo.

Concludendo, *le specie di strutture di spazio topologico generalizzato ammettono limiti diretti.*

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique.* 22 *Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre* 1: *Théorie des ensembles. Chapitre* 4: *Structures,* Actualités Sci. Ind., no. 1258, Hermann, Paris, (1957).

[2] P. M. Cohn, *Universal algebra,* Harper & Row, New York, Evaston & London, (1965).

[3] M. Servi, *Prodotti e quozienti di spazi topologici generalizzati,* Le Matematiche (Catania) 1 (1967), pp. 114-127.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 27 maggio 1967