// Bollettino Unione Matematica Italiana

Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* G. E. Witter, Mathematics, The study of Axiom Systems, Blaisdell Publ. Co., New York, 1964 (Salvatore Ciampa)
* C. Truesdell, Six lectures on modern natural Philosophy, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1966 (Antonio Pignedoli)
* S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, reading, 1965 (S. Ciampa)
* F. R. Gantmacher, Théorie des matices. Vol I: Théorie générale, Vol II: Questions spéciales et applications, Dunod, Paris, 1965 (Carlo Banfi)
* G. Petrovski, Ordinary differential equations, Prentice-Hall Inc., 1966 (Antonio Pignedoli)
* A. G. Mackie, Boundary value problems, Oliver and Boyd, Edinburgh London, 1965 (Antonio Pignedoli)
* A. Halanay, Differential equations. Stability, oscillations, time lags, Academic Press, 1966 (Dario Graffi)
* Cornelius Lanczos, Discourse on Fourier Series, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh London, 1966 (Gianna Zanarini)
* L. S. Pontryagin, Topological Groups, Gordon and Breach Publ., New York, 1966 (S. Ciampa)
* S. S. Abhyankar, Local analytic geometry, Academic Press, 1964 (Iacopo Barsotti)
* T. A. Bak, J. Lichtenberg, Mathematics for scientists, W. A. Benjamin Inc., New York Amsterdam (G. C. Barozzi)
* B. Wendroff, Theoretical numerical analysis, Academic Press, New York, 1966 (Antonio Pignedoli)
* M. V. Wilkes, A short introduction to numerical analysis, Cambridge University Press, 1965 (Antonio Pignedoli)
* G. P. Weeg, G. B. Reed, Introduction to numerical analysis, Blaisdell Publishing Company, Waltham Toronto London, 1966 (Antonio Pignedoli)
* Viktor M. Glushkov, Introduction to Cybernetics, Academic Press, New York London, 1966 (Antonio Pignedoli)
* B. D. Coleman, M. E: Gurtin, I. Herrera R., C. Truesdell, Wave propagation in dissipative materials, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1965 (Antonio Pignedoli)
* A. Blaquière, Nonlinear sysem analysis, Academic Press, New York London, 1966 (Antonio Pignedoli)
* C. A. Coulson, Onde. Problemi matematici della propagazione ondosa, Cremonese, Roma, 1967 (Dario Graffi)
* M. Roseau, Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, Springer-Verlag, 1966 (Dario Graffi)
* A. M. Liapunov, Stability of motion, Academic Press (Carlo Banfi)
* L. C. Biedenharm, H. Van Dam eds., Quantum theory of angular momentum, Academic Press, New York London, 1965 (Antonio Pignedoli)
* G. Serane, Mathématique de la Physique appliquée, Dunod, Paris, 1965 (Antonio Pignedoli)
* Simposio Internazionale sulle applicazioni dell'analisi alla fisica matematica, Cremonese, Roma, 1965 (Dario Graffi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.2, p. 259–278.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_2_259_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

RECENSIONI

G. E. WITTER, *Mathematics, The study of Axiom Systems* Blaisdell Publ. Co., New York, 1964, pp. xvi+336; $ 6.50.

Si tratta di un'opera che si propone di far formare nella mente del lettore un'idea moderna della natura della Matematica.

L'autore intende rivolgersi ad un uditorio che non ha interessi specifici per la Matematica, ma che avendo completato un ciclo di studi superiori desidera non tanto apprendere le tecniche, sia pure elementari, del calcolo ma piuttosto avere un'idea del modo di procedere del lavoro matematico.

Il raggiungimento di questo fine, con le limitazioni imposte della premessa scarsità di conoscenze specifiche da parte dei lettori, condiziona tanto la scelta degli argomenti trattati quanto l'esposizione e l'approfondimento (entrambi in molti punti migliorabili).

L'opera si compone di sette capitoli rispettivamente dedicati agli argomenti seguenti: Logica; Insiemi; Aritmetica e numeri reali; Gruppi e corpi; Algebra; Geometria; Analisi.

Gli elementi di Logica sono costituiti dalle solite tabelle di verità dei connettivi tra proposizioni con un rapidissimo cenno sui quantificatori e si concludono con una discussione sulla dimostrazione dei teoremi.

La teoria degli insiemi (oggetto del secondo capitolo) contiene le definizioni delle operazioni tra insiemi ed una breve discussione sulle cardinalità finite ed infinite.

I numeri naturali vengono introdotti attraverso la cardinalità e, a partire dall'addizione (definita tramite l'unione degli insiemi) e dalla moltiplicazione (definita col prodotto cartesiano di insiemi), si indica la via per giungere all'anello degli interi, al corpo razionale ed a quello reale (considerato come corpo ordinato completo).

Il capitolo successivo contiene gli assiomi (e qualche esempio) relativi ai gruppi ed ai corpi; alla fine vi è la costruzione del corpo complesso.

Vari argomenti di algebra (in senso lato) sono trattati nel quinto capitolo: calcolo algebrico, cenno sui polinomi, cenno sulle equazioni algebriche, un'altra costruzione del corpo complesso, principio di induzione ed assiomi di Peano.

L'assiomatica della Geometria è contenuta nel capitolo sesto che sembra essere il più importante di tutto il volume. Attraverso la considerazione di qualche esempio vengono accennate le proprietà di categoricità, indipendenza, consistenza di un sistema di assiomi. Vi è poi una esposizione della geometria euclidea piana (fino al teorema di Pitagora); il capitolo si conclude con un cenno sulle geometrie non euclidee.

L'ultimo capitolo tratta dei principali concetti infinitesimali relativi alle funzioni reali: limiti, derivate, integrali.

Ogni capitolo contiene numerosi esercizi (molti con avviamento alla soluzione) la cui soluzione è riportata alla fine del volume.

I vari capitoli si chiudono con un breve riassunto del contenuto.

Ottima la veste tipografica.

Si tratta, in conclusione, di un'opera adatta a chi, senza esperienza matematica, voglia avere qualche idea sul metodo assiomatico in Matematica e nel contempo avere cognizione dei principali concetti che si incontrano nella matematica elementare. Il capitolo che riguarda la Geometria può esser letto con profitto, ritiene il recensore, dagli insegnanti delle scuole medie superiori.

SALVATORE CIAMPA

C. TRUESDELL, *Six lectures on modern natural Philosophy*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966, di pag. 117, prezzo 118 DM.

Si tratta di cinque conferenze di seminario a carattere meccanico-teorico e fisico-matematico, coronate da una conferenza finale concernente il metodo ed il « gusto » nei problemi natural-filosofici. La prima conferenza è legata al « Bingham Medal Adress » del 1963, dell'Autore stesso, e concerne la Meccanica teorica « dei materiali ». Si prendono le mosse: dal concetto di corpo come « varietà liscia, gli elementi della quale sono particelle »; dal concetto di « spazio-tempo euclideo » ed, infine, dal concetto di « sistema di forze ». La costruzione della teoria generale poggia sui tre seguenti principî fondamentali: il « principio di determinismo », per cui lo stress in un corpo è determinato dal movimento al quale il corpo stesso è stato soggetto; il principio della « azione locale », per cui il moto al di fuori di un intorno arbitrariamente piccolo di una particella può essere trascurato ai fini della determinazione dello stress nella posizione di quella particella; il principio della « indifferenza materiale », per cui qualsiasi coppia di osservatori del moto di un corpo trova lo stesso stress. La seconda conferenza concerne i « mezzi polari ed orientati ». Vi sono messe in rilievo, in particolare, le teorie di Noll, di Ericksen e di Toupin. Quest'ultimo ha costruito, in sostanza, una teoria generale ed invariante dei materiali iperelastici con microstruttura. Nella conferenza di Truesdell di cui stiamo parlando, appare, per esempio, elegantemente esposto il seguente risultato, denominato *teorema di Cosserat-Toupin*: « in un materiale iperelastico orientato soggetto ad un principio di azione (che viene opportunamente postulato, seguendo la tradizione di Lagrange e di Piola), la densità di azione gode di « invarianza euclidea » se e soltanto se l'impulso, il momento della quantità di moto e l'energia si conservano ». (L'invarianza euclidea è un caso speciale del principio di indifferenza del sistema materiale).

La terza conferenza concerne la Termodinamica della viscoelasticità. Vi si mettono in rilievo i punti di vista recentemente introdotti e sviluppati soprattutto da Coleman.

La quarta conferenza è dedicata ai materiali elettrizzati e vi vengono discussi in particolare i punti di vista di Toupin e Rivlin.

La quinta conferenza riguarda l'affascinante problema ergodico della Meccanica statistica. Il recensore è indotto qui a riportare la frase con cui la conferenza si conclude: « Io amerei — dice l'Autore — di poter affermare che la statistica non è necessaria, che la dizione *Meccanica statistica* sta in luogo di *Meccanica asintotica*, finchè viene considerato l'equilibrio. Questo è quasi vero ma non interamente così ».

La conferenza conclusiva, cioè la sesta, è una ampia ed interessante discussione sul metodo e — si può dire — sul gusto nella ricerca in quel campo della natural filosofia, che consiste nel descrivere i fenomeni per mezzo dei concetti e dei metodi matematici più adatti. Durante l'esposizione emergono, naturalmente, le note idee filosofiche e storiche dell'Autore, che egli delinea da par suo, con la sua tipica ed incisiva vivacità.

Tutto il volume è pervaso da un senso di profondo vigore. Circa le idee dell'Autore nel più vasto terreno filosofico generale, esse possono essere condivise o meno. Non è possibile certo disconoscerne il carattere brillante e talvolta esplosivo.

ANTONIO PIGNEDOLI

S. LANG, *Algebra*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1965; pp. xviii+508; $ 12.75.

L'autore già noto tra i cultori di Matematica per i notevoli contributi apportati in moderni ed elevati rami del sapere matematico, ha proseguito nella meritoria opera di trattatista (sia istituzionale che monografico) presentando questo volume dedicato all'Algebra.

L'opera è scritta in modo da poter servire come testo per un corso annuale (= due semestri delle università americane) a livello non elementare (cioè al cosiddetto *graduate level*).

Nella tradizione della miglior trattatistica moderna, la materia è presentata in modo autosufficiente (almeno in linea di principio): le uniche premesse sottaciute sono quelle riguardanti il linguaggio degli insiemi (argomento ormai entrato nel bagaglio culturale dello studente liceale), l'uso degli interi e quello dei reali. Tuttavia circa tre pagine di *prerequisites* sono premesse alla trattazione vera e propria e si tratta di precisazioni sull'uso di simboli che, sebbene adoperati da tempo, non sono ancora di comune ed univoco impiego nei primi elementi della Matematica (per es. i diagrammi variamente commutativi).

Il trattato è diviso in tre parti, le ultime due indipendenti tra loro, ognuna composta da sei capitoli.

La prima parte contiene le informazioni basilari sui soliti argomenti introduttivi: gruppi, anelli e moduli, polinomi. Vi sono anche due capitoli rispettivamente sull'omologia (con una presentazione moderna dei classici risultati di Schreier, Jordan, Hoelder, Zassenhaus sulle serie di sottogruppi) e sugli anelli e moduli noetheriani

L'unica difficoltà di questa parte, avverte lo stesso autore, consiste nell'impadronirsi in poco tempo di un vocabolario nuovo: in effetti, oltre che di un elenco di nomi occorre impadronirsi anche delle più importanti relazioni tra essi.

La seconda parte contiene una lucida ed esauriente trattazione del problema della soluzione delle equazioni algebriche in una o più incognite. Si tratta, in altre parole, della teoria dei corpi e delle loro estensioni con accento sulla teoria di Galois che, modernamente, è trattata nello spirito classico (si accosta più alla trattazione di Artin che a quella di Jacobson, considerando quindi il caso separabile). Gli ultimi due dei sei capitoli di questa parte introducono lo studente alla teoria dei corpi reali ed a quella delle valutazioni.

Nella terza parte, dedicata all'Algebra lineare ed al problema delle rappresentazioni, dopo un capitolo introduttivo sulle matrici, viene fatto uno studio approfondito dalla struttura delle forme bilineari (che tra l'altro, comprende i gruppi di Witt ed il teorema spettrale nel caso hermitiano e nel caso simmetrico). Segue un breve capitolo sullo studio di un endomorfismo (polinomio caratteristico). All'algebra multilineare si accenna nel capitolo successivo trattando dei prodotti tensoriale, alternante, simmetrico dei moduli. Gli ultimi due capitoli sono dedicati al problema della decomposizione di moduli e gruppi al fine di ottenere informazioni generali sulla loro struttura. La rappresentazione dei gruppi finiti è esposta molto modernamente tenendo conto dei contributi apportati da Brauer a questo importante argomento dell'Algebra.

La trattazione è conclusa da una breve appendice sulla dimostrazione della trascendenza dei numeri e e π, seguendo le idee di Gelfond Schneider.

Ogni capitolo è accompagnato da numerosi esercizi a proposito dei quali è da osservare che spesso si tratta di cenni introduttivi ad argomenti non toccati nel testo (per esempio, tra gli esercizi si trovano definizioni e prime proprietà dei limiti diretti ed inversi, dei moduli proiettivi ed iniettivi, dei vettori di Witt, ecc.). Gli esercizi del capitolo quarto sono contenuti nella fase seguente, testualmente tradotta «Prendere un qualsiasi testo di algebra omologica e dimostare tutti i teoremi senza guardare le dimostrazioni date nel testo stesso.».

L'ultimo esercizio del capitolo settimo è un problema insoluto relativo ad una congettura di Artin, come l'autore stesso avverte.

Il libro è scritto con notevole cura: per esempio, a proposito delle denominazioni gruppo ortogonale, simplettico, unitario, dopo aver notato che esse non sono tra le più felici, l'autore ne propone altre avvertendo che ha maturato queste conclusioni dopo aver lungamente discusso della cosa.

Anche la stampa è ottima e gli errori tipografici notati sono rarissimi e di nessun rilievo.

In conclusione, la chiarezza e la modernità dell'esposizione, la ricchezza del contenuto, gli stimolanti esercizi fanno di quest'opera un ottimo trattato di Algebra, la cui consultazione sarà proficua sia per lo studente maturo che per lo specialista.

S. CIAMPA

F. R. GANTMACHER, *Théorie des matrices: vol. I Théorie générale*, pp. 384, 69 F; *vol. II Questions spéciales et applications*, pp. 280, 56 F., Dunod, Paris, 1965.

Si tratta della traduzione in francese del notissimo trattato russo sulla teoria delle matrici. Il calcolo delle matrici riveste oggigiorno una importanza via via crescente per lo sviluppo che vanno assumendo le sue applicazioni nei più svariati campi, dalla matematica alla fisica, alla ingegneria, alle scienze sociali ed economiche. Ben si inserisce in questo sviluppo una traduzione in francese di questo trattato.

L'Opera si distingue per il suo chiaro indirizzo applicativo e per la sua completezza, purtroppo anche a costo della snellezza della trattazione.

Dopo una introduzione delle nozioni e proprietà delle matrici e degli operatori lineari negli spazi vettoriali a dimensioni finite, si passa allo studio del polinomio caratteristico e del polinomio minimale di una matrice e alle funzioni di matrici. Particolarmente ampia risulta la trattazione della riduzione di una matrice a forma normale, con l'esposizione completa di metodi applicativi per la riduzione. L'ultima parte del I volume è dedicata agli operatori negli spazi unitari e in particolare negli spazi euclidei e alle forme quadratiche ed hermitiane. Fra gli argomenti del II volume segnaliamo in particolare: lo studio delle matrici ad elementi non negativi con applicazione alle catene di Markov omogenee e alle proprietà delle vibrazioni dei sistemi elastici; le applicazioni ai sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti e a problemi di stabilità.

Il trattato è corredato da una ricca bibliografia con quasi quattrocento voci e si presenta nella solita elegante veste della « Collection universitaire de mathematiques » dell'editore Dunod.

CARLO BANFI

G. PETROVSKI, *Ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Inc., N.J. 1966, di pag. 232, prezzo non indicato.

L'autore dell'opera, professore di Matematiche e Rettore della Università degli studi di Mosca, ha scritto altre ben note trattazioni concernenti le equazioni differenziali alle derivate parziali e le equazioni integrali. Il lavoro, di cui stiamo occupandoci come recensione, è tradotto dal russo ad opera di R. A. Silvermann, membro dell'Istituto Courant per le scienze matematiche dell'Università di New York. Consta essenzialmente di due parti, la prima delle quali è dedicata alle equazioni differenziali del primo ordine, la seconda ai sistemi di equazioni differenziali alle derivate ordinarie La prima parte è costituita da tre capitoli. Il primo riguarda i concetti di base, il secondo alcuni tipi particolarmente importanti di equazioni differenziali, la terza la teoria generale. La seconda parte è costituita da quattro capitoli. Il primo di essi espone la teoria generale dei sistemi, il secondo la teoria generale dei sistemi lineari, il terzo la teoria dei sistemi lineari a coefficienti costanti, il quarto la teoria dei sistemi autonomi. Naturalmente, la lettura del volume presuppone buone conoscenze analitiche di base ed anche qualche conoscenza di Algebra lineare, anche se il bagaglio di nozioni richieste in quest'ultimo corpo di dottrina è, in realtà, meno vasto di quanto si potrebbe essere indotti a pensare in un primo tempo.

Caratteristica dell'opera è la presenza di molti problemi inclusi nei vari paragrafi, il che, al solito, non è utile soltanto per chi si avvii alla conoscenza della materia, ma anche per chi si sforzi di approfondirla. La visione delle cose « dal di dentro » può progredire, in virtù degli esempi e dei problemi — si direbbe — senza limiti, nel senso che la problematica stessa va costruendosi via via nella mente dello studioso. Altra caratteristica dell'opera è una costante attenzione all'aspetto geometrico delle questioni trattate ed alle implicazioni di un tale atteggiamento di pensiero.

Del volume citeremo, in particolare, alcuni paragrafi, come le pagine riguardanti la stabilità delle soluzioni o quelle concernenti il teorema di Brouwer « del punto unito » e le applicazioni del medesimo.

Un capitolo supplementare concerne le equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine, da quelle semilineari a quelle non-lineari, alle equazioni pfaffiane. Bella la veste tipografica.

ANTONIO PIGNEDOLI

A. G. MACKIE, *Boundary value problems*, Oliver and Boyd, Edinburgh-London, 1965, di pag. 252, prezzo 50 s.

L'Autore, professore nella Victoria University di Wellington (Nuova Zelanda), fornisce una interessante esposizione dei metodi di risoluzione dei problemi al contorno per equazioni differenziali alle derivate ordinarie ed alle derivate parziali, con particolare riguardo all'uso delle funzioni di Green ed alle tecniche trasformazionali.

Dei sei capitoli, che costituiscono il volume, il primo concerne i problemi di valori iniziali per le equazioni differenziali ordinarie, e consta di undici paragrafi. Vi è messo in luce il metodo della trasformazione di Laplace; l'ultimo paragrafo è dedicato alla formula generale di inversione. Seguono esercizi. Il secondo capitolo concerne i problemi ai limiti relativi a due punti e consta di tredici paragrafi.

Il terzo capitolo, su undici paragrafi, riguarda i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali alle derivate parziali. Un paragrafo vi è dedicato ai metodi delle trasformate integrali. Vanno anche notati due paragrafi concernenti, rispettivamente, problemi vibratorî e di diffusione.

Il capitolo quarto riguarda gli integrali di Fourier. Consta di nove paragrafi e vi si trovano la trasformazione di Fourier nei suoi rapporti con la trasformazione di Laplace, nonchè le trasformazioni di Mellin e di Hankel. Il quinto paragrafo del capitolo (quarantesimo del volume) concerne applicazioni alle onde nell'acqua.

Il quinto capitolo, concernente le funzioni di Green nelle equazioni alle derivate parziali, è caratterizzato da una particolare attenzione alle equazioni delle onde e della diffusione. Il sesto capitolo riguarda il metodo di Riemann e si conclude con un paragrafo concernente il metodo della funzione di Green ordinaria.

Alla fine di ogni capitolo dell'interessante opera (che si presenta in bella veste tipografica) trovano posto appropriati esercizi di applicazione e di stimolo allo sviluppo ulteriore della materia esposta.

ANTONIO PIGNEDOLI

A. HALANAY, *Differential equations*, Stability, oscillations, time lags. Academic Press, 1966, pp. XII+528, 19,50$.

Come si comprende dal titolo, il libro (già pubblicato in lingua romena e ora tradotto in inglese) contiene argomenti di grande attualità. Esso appare di notevole interesse anche perchè riporta numerosi e importanti risultati della scuola russa, talvolta trascurati nelle altre trattazioni.

Il libro si suddivide in quattro capitoli preceduti da una introduzione sui sistemi di equazioni differenziali. Il primo è dedicato alla teoria della stabilità del movimento che, come è noto, può sempre ricondursi allo studio della stabilità per la soluzione $x=0$ del sistema:

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t) \tag{1}$$

dove x ed f sono vettori dello spazio ad n dimensioni, t la variabile (scalare) indipendente. L'autore introduce varie nozioni di stabilità per la x, anzitutto la stabilità ordinaria (scelto un numero $\varepsilon>0$ arbitrario si può trovare un $\delta(\varepsilon)$ tale che, se $x(t)$ è una soluzione di (1) $|x(t)|<\varepsilon$ per $t>t_0$, se $|x(t_0)|<\delta(\varepsilon)$ la stabilità uniforme ($\delta(\varepsilon)$ indipendente da t_0), la stabilità asintotica ($x(t)$ oltre ad essere stabile è tale che $\lim x(t)=0$ per $t\to\infty$, stabilità uniforme asintotica (uniforme stabilità e $\lim x(t)=0$ per $t\to\infty$), infine totale stabilità (stabilità se a secondo membro di (1) si aggiunge un termine perturbativo sufficientemente piccolo). Egli dimostra che queste diverse condizioni di stabilità possono essere assicurate in base a funzioni di Liapunov dotate di opportune proprietà, e, in certi casi, dimostra l'esistenza di quelle funzioni. Interessante fra l'altro, il seguente risultato di Malkin: la stabilità asintotica uniforme implica la stabilità totale. In questo capitolo viene inoltre trattata, con la dovuta ampiezza, la stabilità in prima approssimazione, il caso di $f(x,t)$ lineare, cioè:

$$f(x,t)=A(t)x+f(t)$$

dove $A(t)$ è una matrice quadrata, $f(t)$ un vettore. In particolare si esamina il caso $A(t)$ costante o funzione periodica di t.

Il secondo capitolo è dedicato alla stabilità nei sistemi a controllo non-lineare, che viene studiata con vari metodi, ad esempio con quello di A. I. Lurie e con quello della trasformata di Fourier dovuto ad A. M. Popov. Interessante la nozione di « stabilità pratica » o meglio ε_0 stabilità definita, come nel caso della stabilità ordinaria, imponendo però ad ε di superare un numero positivo prefissato ε_0. Segue un capitolo dedicato alla teoria delle oscillazioni. L'autore si occupa principalmente di provare l'esistenza di soluzioni periodiche o quasi periodiche del sistema (1), prima nel caso lineare, poi nel quasi quasi-lineare ($f(x, t) = A(t)x + \varphi(x, t)$, $A(t)$ e $\varphi(x, t)$ rispettivamente matrice e vettore funzioni periodiche di t con lo stesso periodo e con $\varphi(x, t)$ soddisfacente opportune ipotesi). Considera poi i sistemi contenenti un piccolo parametro, ε cioè $f(x, t) = X_0(x, t) + \varepsilon X_1(x, t, \varepsilon)$ che ammettono soluzioni periodiche per $\varepsilon = 0$ e, anche in questo caso, con diversi metodi (come metodo della media, metodi topologici) dimostra, per ε abbastanza piccolo, l'esistenza di soluzioni periodiche. I risultati precedenti sono poi estesi ai sistemi autonomi (cioè al caso in cui il secondo membro di (1) non dipende da t) e al caso delle perturbazioni singolari (cioè quando alcune componenti di $f(x, t)$ sono inversamente proporzionali al numero molto piccolo ε). L'autore riporta anche il metodo di successive approssimazioni, introdotto da Cesari, per studiare i sistemi non-lineari con un piccolo parametro.

Di grande interesse è senza dubbio l'ultimo capitolo in cui viene svolta una teoria organica dei sistemi a ritardo dei quali è ben nota l'importanza anche pratica. L'autore considera il sistema differenziale e alle differenze:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau)) \tag{2}$$

dove τ (ritardo) è un numero positivo. Anzitutto dimostra (sotto condizioni molto larghe per i bisogni della pratica) l'esistenza e l'unicità delle soluzioni di (2) per $t > t_0$, qualora sia, per $t_0 - \tau < t < t_0$, $x(t)$ uguale a una funzione assegnata $F(t)$. Segue una trattazione dei sistemi a ritardo, analoga, nelle grandi linee, a quella svolta nei capitoli precedenti per i sistemi del tipo (1). Cioè si definisce e si studia la stabilità delle soluzioni di (2) rispetto a piccole variazioni di $F(t)$, si studiano i sistemi lineari, la teoria dei controlli con elementi a ritardo, i sistemi con un piccolo parametro, si espone il metodo della media per risolvere la (2), etc. Ora però le questioni sono più difficili anche perchè le soluzioni di (2) sono funzionali della $F(t)$ e perciò occorrono spesso delicate considerazioni di analisi. È opportuno notare che alcuni dei più importanti risultati contenuti nel capitolo sono dovuti all'autore del presente volume.

In tutto il libro l'esposizione è rigorosa e tenuta ad un alto livello matematico. Il libro è perciò consigliabile agli studiosi che ritengono aggiornarsi e approfondirsi su questioni di notevole importanza teorica e pratica.

DARIO GRAFFI

CORNELIUS LANCZOS, *Discourse on Fourier Series*, University Mathematical Monographs, Oliver and Boyd Ltd. Edimbourgh and London, sh. 63 - (1966).

Il volume ha preso origine da un corso di lezioni tenuto dal'Autore presso l'Università di Washington.

È bene chiarire innanzitutto che, come l'Autore stesso sottolinea nel corso del volume, non si tratta di un'opera di matematica pura, ma piuttosto di una trattazione fortemente orientata verso le applicazioni (un secondo volume, dedicato appunto alle applicazioni, è in preparazione), il cui interesse quindi, citando le parole dello stesso Lanczos, « non è rivolto ai casi patologici, ma alle proprietà delle serie relativamente ad una classe di funzioni assai regolari; ciò nonostante, per quanto riguarda la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann, le deduzioni matematiche sono del tutto rigorose ».

Il volume si divide in tre parti: le serie di Fourier, le serie di Fourier nei problemi di approssimazione, l'integrale di Fourier.

La prima parte, in cui l'aspetto storico del problema è mescolato in maniera assai piacevole e proficua all'aspetto strettamente matematico, costituisce una presentazione molto ben fatta di una notevole quantità di materiale; va sottolineata anche la presenza di problemi e l'inserimento di alcune domande (per nulla banali) poste dagli studenti al termine delle lezioni.

La seconda parte è di gran lunga la più originale in un testo di matematica (non bisogna dimenticare però che si tratta di un'opera di Lanczos) e riguarda problemi, come la regolarizzazione globale di dati affetti da rumore e la ricerca di periodicità nascoste, che sono certamente tra i più interessanti in questo campo dal punto di vista applicativo. Si tratta di questioni che già erano trattate nel volume « Applied Analysis », ma che qui vengono molto più ampiamente sviluppate.

La terza parte, che completa il volume, è dedicata all'integrale di Fourier e alle Trasformate di Fourier e Laplace. Anche qui non si suppone nel lettore una particolare cultura matematica, per cui vengono sviluppate in dettaglio le tecniche necessarie, come ad esempio il metodo dei residui, sempre però senza perdere di vista l'impostazione prevalentemente applicativa dell'opera.

In definitiva, in attesa dell'annunciato secondo volume, non si può che raccomandare questo libro a tutti coloro che si occupano di questi argomenti dal punto di vista applicativo, i quali troveranno un inquadramento complessivo assai utile. Nello stesso tempo il volume è così ben fatto che la sua lettura può risultare senza dubbio piacevole e proficua anche per i matematici.

GIANNI ZANARINI

L. S. PONTRYAGIN, *Topological Groups*, (2nd edit.), translated from russian by Arlen Brown; Gordon and Breach publ., New York, 1966; pp. xvi + 543; $ 17,50.

Si tratta della traduzione dal russo della seconda edizione dell'ormai famosa opera del topologo L. S. Pontryagin. La prima edizione di quest'opera apparve nel 1938, è stata tradotta in inglese presso la Princeton Univ. Press nel 1939 e recensita in questo Bollettino nel 1941.

Di questa seconda edizione (apparsa nel 1954 e differente sotto molti importanti aspetti della prima: la mancanza, quando non sia necessaria, dell'ipotesi di separabilità degli spazi topologici, l'aggiunta della classificazione dei gruppi di Lie compatti nell'ultimo capitolo, ...) esiste una traduzione tedesca del 1957. Nella traduzione che qui si recensisce sono state apportate alcune correzioni (anche rispetto alla traduzione tedesca) e la terminologia seguita è quella correntemente adoperata nei libri americani.

L'opera si apre con una pagina introduttiva sulle notazioni adoperate e contiene undici capitoli.

I primi due capitoli sono dedicati, nell'ordine, ad una rapida ed efficace introduzione alla teoria dei gruppi (con cenni sugli anelli e sui corpi) ed agli spazi topologici. Il primo capitolo contiene anche il teorema fondamentale sulla struttura dei gruppi abeliani e si conclude con un cenno sulle relazioni dei corpi con la geometria proiettiva. Il capitolo sulla topologia descrive le usuali proprietà degli spazi e si chiude con un cenno sulla nozione di dimensione.

L'argomento proprio del trattato viene introdotto nel terzo capitolo dove sono raccolte le informazioni generali concernenti i gruppi topologici. Alla fine del capitolo (che contiene un lungo paragrafo sulle proprietà locali) vengono studiati i gruppi di trasformazioni operanti su spazi topologici.

Il quarto capitolo (nuovo rispetto alla precedente edizione) è dedicato allo studio dei corpi topologici: di quelli localmente compatti (non discreti) viene fornita una completa classificazione (risultati di Jacobson, Kowalski, Kaplanski, Safarevich). Dei risultati di questo capitolo non viene fatto alcun uso nel seguito dell'opera.

Nel successivo capitolo quinto vengono studiate le rappresentazioni di dimensione finita dei gruppi compatti: a tal fine viene definito l'integrale di Haar mediante la costruzione delle medie di von Neumann. L'autore stesso avverte che la costruzione esposta vale per i gruppi compatti, ma che anche per quelli localmente compatti un analogo integrale si può definire. Questo capitolo contiene anche un cenno sulla teoria delle equazioni integrali con nucleo simmetrico.

La dualità per i gruppi localmente compatti abeliani viene studiata in dettaglio nel sesto capitolo: vi compaiono i fondamentali risultati dello stesso Pontryagin e di van Kampen.

Col capitolo settimo accanto alle strutture algebrica e topologica viene introdotta la struttura differenziale: si giunge così alla nozione di gruppo di Lie le cui principali proprietà sono studiate tenendo presente la distinzione tra il requisito della differenziabilità e quello dell'analiticità, riservandosi di mostrare nelle successive investigazioni che è sufficiente richiedere la differenziabilità. Lo studio dei gruppi di Lie viene proseguito ed approfondito negli ultimi due capitoli.

I gruppi di Lie compatti vengono studiati nel capitolo ottavo arrivando ai classici risultati di Pontryagin (ogni gruppo localmente connesso e compatto avente dimensione finita è un gruppo di Lie) e di Montgomery e Zippin (ogni gruppo compatto di trasformazioni che agisce effettivamente e transitivamente su uno spazio localmente connesso di dimensione finita è un gruppo di Lie).

Nel capitolo nono le nozioni di gruppo fondamentale di uno spazio topologico e di « *covering space* » vengono introdotte e studiate con un certo approfondimento per poi venir congiunte facendone risultare la nozione di « *universal covering group* » di un dato gruppo topologico connesso per archi e localmente connesso per archi.

Gli ultimi due capitoli, come si è detto, riprendono lo studio delle proprietà generali dei gruppi di Lie associando ad ognuno di essi una opportuna algebra, detta appunto algebra di Lie associata al gruppo stesso. Nel capitolo decimo vengono approfondite le relazioni tra un gruppo di Lie e la sua algebra associata, nel capitolo successivo invece viene studiata la struttura dei gruppi di Lie compatti (risultati di Killing, Cartan, Weyl) e, seguendo un metodo introdotto da Dynkin, si giunge alla completa classificazione delle algebre di Lie compatte (cioè isomorfe all'algebra associata ad un gruppo di Lie compatto) semplici e semi-semplici.

La bibliografia e l'indice per argomenti chiudono il volume che, ancora oggi, si può considerare un « classico » sull'argomento dei gruppi topologici.

L'abbondanza degli esempi (solitamente presentati in tutti i dettagli), lo stile piano e le dimostrazioni particolareggiate rendono la lettura di quest'opera proficua e facile anche per il principiante.

S. Ciampa

S. S. ABHYANKAR, *Local analytic geometry*, Academic Press, 1964, pp. XV+484.

Il tema generale di questo libro è quello della traduzione su corpi valutati completi, e conseguente algebricizzazione, di quanta più parte sia possibile della teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse e della teoria degli spazi analitici; il metodo usato (forse l'unico che si presti) è quello delle serie di potenze, e lo strumento più frequentemente adoperato è il teorema di preparazione di Weierstrass. Un serio bisogno di teorie di tale tipo, dettato da necessità di ricerca più che da brama di generalizzazione, comincia a farsi sentire solo ora, ed è prematuro voler giudicare se le teorie che riusciranno utili saranno le imitazioni della teoria classica, ovvero cose completamente nuove. Nel primo caso questo volume dovrebbe essere molto utile come libro di consultazione (lo stile estremamente stringato e la densità delle formule lo rendono inadatto ad una lettura consecutiva); per questo motivo sarebbe stato desiderabile che la lista dei simboli data alla fine del volume fosse assai più comprensiva; in compenso vi è resa facile la localizzazione degli enunciati, che sono numerati globalmente anzichè essere suddivisi, come taluni autori ora usano, in sottoinsiemi con numerazioni indipendenti.

I titoli dei capitoli sono i seguenti: 1. Teoria elementare sul corpo complesso; 2. Teorema di preparazione di Weierstrass; 3. Richiamo di algebra locale; 4. Parametri negli anelli di serie di potenze; 5. Insiemi analitici; 6. Il linguaggio dei fasci; 7. Spazi analitici. I capitoli 5 e 7 contengono i risultati più geometrici, e fra questi non si può passare sotto silenzio una facile dimostrazione (su corpi valutati completi, forse algebricamente chiusi, con valutazione archimedea, ovvero non archimedea non discreta di rango 1) del risultato, dovuto a W. L. Chow per il corpo complesso, secondo cui una varietà analitica proiettiva è algebrica.

IACOPO BARSOTTI

T. A. BAK, J. LICHTENBERG, *Mathematics for scientists*, W. A. Benjamin, Inc. New York-Amsterdam; pp. XIV+487.

La prima edizione del volume in esame fu pubblicata a Copenhagen nel 1960 come testo base per un corso annuale di matematica per chimici, biologi e medici. La necessità di fornire rapidamente le idee fondamentali dell'algebra lineare e dell'analisi, e di sviluppare le idee stesse fino ad ottenerne strumenti di utili applicazioni, impone ovviamente la rinuncia ad un'esposizione troppo dettagliata e rigorosa. Molti (forse troppi) gli argomenti trattati: vettori, matrici, gruppi nella prima parte; funzioni reali di una o più variabili reali nella seconda parte; serie, equazioni differenziali, funzioni di una variabile complessa nella terza parte, ed infine, nella quarta parte del libro, alcuni elementi di analisi numerica. Molti risultati sono forniti senza dimostrazione; altri sono stabiliti senza porre chiaramente in evidenza le ipotesi necessarie. In compenso, ottime sono le illustrazioni grafiche, gli esercizi al termine di ogni capitolo, le applicazioni a questioni di chimica o di fisica.

Opportunamente alleggerito in alcune parti e precisato meglio in altre parti, il libro può costituire un'utile base per un corso annuale per chimici (primo anno) oppure per biologi e naturalisti.

G. C. BAROZZI

B. WENDROFF, *Theoretical numerical analysis*, Academic Press Inc. Publishers, New York, 1966.

L'opera consiste di cinque capitoli. Il primo di essi è dedicato alla « interpolazione e quadratura ». Consta di quattro paragrafi concernenti, rispettivamente, l'interpolazione hermitiana, l'interpolazione lagrangiana e la quadratura secondo il metodo di Newton-Côtes, i polinomi ortogonali e la quadratura gaussiana, l'interpolazione non analitica e la quadratura associata. Il secondo capitolo concerne l'approssimazione e consta pure di quattro paragrafi, dei quali il primo riguarda il grado di approssimazione mediante polinomi, il secondo l'approssimazione mediante interpolazione, il terzo e il quarto concernono l'approssimazione nel senso di Chebyshev.

Il terzo capitolo, su tre paragrafi, è dedicato alle equazioni differenziali alle derivate ordinarie. Il primo paragrafo di tale capitolo riguarda il problema dei valori iniziali, il secondo un problema non omogeneo di valori al contorno, il terzo un problema omogeneo pure di valori al contorno.

Il quarto capitolo, articolato su quattro paragrafi, concerne la risoluzione delle equazioni. Il primo paragrafo di tale capitolo riguarda l'inversione delle matrici per « decomposizione triangolare »; il secondo riguarda il problema di autovalori per le matrici; il terzo i metodi iterativi lineari; il quarto i metodi iterativi per sistemi non-lineari.

Infine il quinto capitolo del volume è dedicato alle equazioni differenziali alle derivate parziali. Consta di quattro paragrafi, il primo dei quali concerne i sistemi del primo ordine, il secondo l'equazione del calore, il terzo la stabilità, il quarto il principio di massimo.

Alla fine dell'opera appare una esauriente bibligrafia. Bella la veste tipografica.

Il tono generale dell'opera stessa può essere caratterizzato come segue. Si tratta di una introduzione verso alcuni degli aspetti più interessanti e significativi della Analisi numerica, come si vede dalla elencazione che abbiamo sopra fatto dei principali argomenti trattati nel testo. Ma v'è un aspetto del volume che lo rende particolarmente interessante. Non solo alla fine di ogni capitolo sono proposti esercizi, con opportuni suggerimenti; ma sono proposte questioni di calcolo elettronico. Durante la trattazione il lettore è stato, invero, condotto ad impossessarsi dei mezzi per la corretta impostazione di tali questioni, mediante l'esposizione di metodi pratici per la risoluzione di problemi mediante le macchine.

La discussione di parecchie questioni originali, il fatto che vengano fornite nel dettaglio dimostrazioni non facili, il fatto che nel volume si trovi una introduzione rigorosa alla teoria degli operatori differenziali parziali stabili rendono poi l'opera particolarmente utile ed interessante.

ANTONIO PIGNEDOLI

M. V. WILKES, *A short introduction to numerical anlysis*, Cambridge University Press, 1965, di pag. 76, prezzo 25 s.

Si tratta di una concisa esposizione degli argomenti di base del Calcolo numerico, fatta anche nell'intento di giovare a coloro che si occupano di Calcolo elettronico digitale.

L'Autore esordisce con un paragrafo dedicato alla posizione occupata dall'Analisi numerica nell'ambito della Scienza e dell'Ingegneria. I due paragrafi successivi sono dedicati, rispettivamente, alla iterazione ed alla interpolazione. Seguono due paragrafi, nel primo dei quali vengono esposte l'integrazione e la derivazione numeriche, nel secondo i metodi di risoluzione numerica delle equazioni differenziali alle derivate ordinarie (metodo di Adams-Bashforth, metodo della serie di Taylor, metodo di Runge-Kutta, etc).

Nel sesto paragrafo l'Autore si occupa dei problemi riducibili ad equazioni simultanee, adducendo, come utile esempio, quello dell'equazione di Poisson (in cui si giunge ad un sistema di equazioni lineari).

L'opera si conclude con la soluzione delle equazioni lineari algebriche. Opportuni esempi, incorporati nella trattazione e proposti alla fine dei paragrafi su cui è articolato il volumetto, rendono la lettura più incisiva e più utile, nel suo evidente e dichiarato ruolo di sintesi introduttiva.

ANTONIO PIGNEDOLI

G. P. WEEG and G. B. REED, *Introduction to numerical analysis*, Blaisdell Publishing Company, Waltham-Toronto-London, 1966, pp. 184 s.i.p.

Si tratta di un libro a carattere introduttivo ed evente esplicito scopo di avviamento allo studio della materia.

L'opera consta di otto capitoli seguiti da appendici. Il primo capitolo concerne gli errori nelle valutazione numeriche; il secondo la determinazione delle radici reali di unā equazione. Il terzo capitolo è dedicato alle approssimazioni polinomiali e alle differenze finite. Nel quarto si tratta della integrazione numerica (formule di quadratura che usano i polinomi di Gregory-Newton, termine di errore nelle formule di quadratura, formule di quadratura di Newton-Cotes etc.).

Il quinto capitolo è dedicato alla risoluzione numerica delle equazioni differenziali ordinarie (metodo di Taylor, metodo di Runge-Kutta e metodi legati, metodi di Milne, metodo di Adams-Bashforth). L'attenzione degli autori si rivolge anche ai sistemi.

Il sesto capitolo concerne le equazioni lineari algebriche e le matrici. Particolare attenzione è rivolta al metodo di Gauss, anche in relazione alle macchine calcolatrici, ed al metodo di Gauss-Seidel.

Il capitolo settimo è dedicato all'approssimazione dei minimi quadrati.

L'ottavo (ultimo dell'opera) concerne la quadratura gaussiana (interpolazione di Lagrange, interpolazione di Hermite, quadratura gaussiana, quadratura di Gauss-Legendre, quadratura di Gauss-Laguerre, quadratura di Gauss-Chebychev, quadratura di Gauss-Hermite).

Le appendici contengono utili richiami di nozioni analitiche. Il testo contiene, felicemente, molti esempi.

ANTONIO PIGNEDOLI

VIKTOR M. GLUSHKOV, *Introduction to Cybernetics*, di pag. 332, Ed. Academic Press, New York-London 1966, trad. in inglese dal russo a cura di « Scripta technica, inc. » (senza indicazione di prezzo).

L'opera consta di sei capitoli, preceduti da una prefazione illustrante gli scopi ed i caratteri della trattazione, e seguiti da un elenco di referenze bibliografiche e da un indice. Il primo capitolo è dedicato alla « teoria astratta degli algoritmi » e consta di cinque paragrafi. Vien fatto di fermare l'attenzione sul terzo, nel quale viene descritto un metodo molto generale di definizione degli algoritmi suggerito da KOLMAGOROV e da USPENSKIY. Nella costruzione del loro schema algoritmico, tali autori fanno uso soltanto di proprietà che sono invariabilmente applicabili ad ogni schema algoritmico. Nel quarto paragrafo vengono considerati altri schemi algoritmici teorici.

Il secondo capitolo dell'opera concerne le « funzioni booleane ed il calcolo delle proposizioni ». Consta di cinque paragrafi dedicati rispettivamente alle funzioni booleane, all'algebra di Boole, agli insiemi completi di operazioni booleane, all'applicazione dell'algebra di Boole alla teoria delle « reti », cioè a quei semplici sistemi tecnici che servono per la trasformazione della « informazione discreta »; infine al calcolo delle proposizioni.

Nel capitolo terzo appare esposta la teoria degli automatismi, dai concetti essenziali relativi agli automatismi astratti, alla rappresentazione degli eventi negli automatismi, alla considerazione dei cosiddetti « automatismi finiti ». Il quarto capitolo concerne i sistemi « autoorganizzantisi » (qui un paragrafo è dedicato a richiami di calcolo delle probabilità). Il terzo paragrafo del capitolo di cui stiamo parlando riguarda le valutazioni quantitative negli automatismi in parola. Precisamente ci si occupa della misura quantitativa della autoorganizzazione e dell'« automiglioramento » negli automatismi, basandosi sul concetto meccanico-statistico di entropia. Il quarto paragrafo è dedicato agli automatismi con transizioni aleatorie e vi appaiono, quindi, alcune proposizioni fondamentali relative alle catene di Markov. Il capitolo si conclude con considerazioni relative al cosiddetto « auto-accomodamento » ed a problemi di ottimizzazione.

Va segnalato che la materia trattata nel capitolo quarto, cui in questo momento si rivolge la nostra attenzione, si può considerare connessa ai « Principi di neurodinamica » di F. Rosenblatt.

Il quinto capitolo del volume è articolato su cinque paragrafi e riguarda la progettazione in senso generale dei calcolatori elettronici « digitali » e la « programmazione » nei medesimi. Particolare attenzione viene rivolta, in tale capitolo, al linguaggio universale algoritmico « Algol 60 ». Vengono dati anche esempi di programmazione « Algol » con particolare riguardo ai sistemi autoorganizzantisi.

Il sesto ed ultimo capitolo del volume è dedicato al « calcolo dei predicati » e alla formulazione e dimostrazione automatiche di teoremi nelle teorie deduttive. Va segnalato, in particolare, il secondo paragrafo del capitolo in questione, concernente il celebre teorema di Godel sulla incompletezza della Aritemetica. L'interessante volume trae origine da lezioni tenute dall'Autore, su argomenti ed aspetti vari della Cibernetica e della Logica matematica, presso l'Università di Kiev e costituisce una delle esposizioni più organiche esistenti a tutt'oggi in materia di Cibernetica.

ANTONIO PIGNEDOLI

B. D. COLEMAN, M. E. GURTIN, I. HERRERA R., C. TRUESDELL, *Wave propagation in dissipative materials*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965, di pagine 338, senza indicazione di prezzo.

Si tratta di una raccolta di cinque memorie, precedute da una interessante prefazione di Clifford Truesdell. La prima di tali memorie, che l'autore, Truesdell stesso, dedica ad Hadamard in segno di ammirazione e di affetto nel sessantesimo anniversario delle celebri « Leçons sur la propagation des ondes », riguarda l'istituzione di una teoria generale ed esatta delle onde nell'ambito della dottrina delle deformazioni elastiche finite. Consta di quattordici paragrafi e di un'ampia bibliografia finale. Nel primo paragrafo l'autore, prendendo le mosse dalla citazione delle classiche ricerche di CHRISTOFFEL, HUGONIOT e HADAMARD, nonchè di DUHEM sulle onde nei materiali elastici, fa il punto sulla situazione concernente il problema. Il secondo paragrafo concerne la teoria generale delle onde di accelerazione; il terzo la teoria generale delle onde di ordine più alto; il quarto la teoria generale di onde piane progressive infinitesimali in un materiale soggetto a deformazione omogenea. I paragrafi quinto e sesto sono dedicati, rispettivamente, al confronto fra i differenti tipi di onde ed alle conseguenze del « principio di indifferenza materiale ». Seguono: la considerazione dei materiali isotropi, in particolare dei medesimi soggetti a pressione idrostatica; la determinazione delle relazioni intercorrenti fra sforzi e deformazioni, ottenute dalle velocità ondose, la determinazione delle condizioni affinchè le onde siano reali.

L'undicesimo paragrafo concerne le onde in accordo con la teoria della elasticità del secondo ordine per materiali isotropi; il decimosecondo i materiali iperelastici; il paragrafo decimoterzo concerne poi i teoremi di Duhem sugli effetti della variazione di temperatura. La memoria si conclude con un paragrafo dedicato ad osservazioni su ulteriori ricerche.

All'articolo di Clifford Truesdell, di cui abbiamo detto sopra, fanno seguito quattro memorie, concernenti le « onde in materiali con memoria ». In effetti, come si dice testualmente nella introduzione della prima di tali memorie, dovuta a B. D. Coleman, M. E. Gurtin ed I. Herrera R., « lo stress in un certo punto di un materiale semplice dipende dalla intera storia temporale della deformazione in quel punto ». La prima memoria, di cui stiamo dicendo, concerne la velocità delle onde d'urto e di accelerazione unidimensionali e consta di sei paragrafi, dei quali il primo costituisce un inquadramento di partenza, mentre nel secondo si introduce il « funzionale costitutivo », nel terzo si tratta delle proprietà generali delle onde, nel quarto delle onde d'urto, nel quinto delle onde di accelerazione, e nel sesto si conclude con esempi di moti unidimensionali.

La seconda delle memorie concernenti le onde in materiali con memoria è dovuta a B. Coleman ed M. E. Gurtin.

Essa consta di nove paragrafi e concerne l'aumento ed il decadimento delle onde di accelerazione unidimensionali. Il lavoro prende le mosse dall'assunto di quella che gli autori definiscono « fading memory » ed ha proprio lo scopo di dedurre espressioni generali ed esplicite per il cambiamento di ampiezza di onde di accelerazione unidimensionali propagantisi attraverso materiali semplici omogenei obbedienti al principio della « fading memory ». (Per tale principio, il lettore veda le pag. 239 e 240 della memoria in questione).

Il secondo paragrafo della memoria riguarda le proprietà generali dell'ampiezza delle onde di accelerazione; il terzo paragrafo riguarda l'applicazione alla viscoelasticità lineare; il quarto paragrafo concerne il problema di un'onda che entri in una regione omogenea in quiete. Seguono applicazioni varie ed interessanti considerazioni di ordine fisico.

La memoria successiva, sempre di B. D. Coleman ed M. E. Gurtin, consta di undici paragrafi ed è dedicata alle influenze termodinamiche della crescita e del decadimento delle onde di accelerazione. In sostanza, il lavoro è dedicato al calcolo della velocità di onde di accelerazione unidimensionali ed a mostrare come gli effetti dissipativi della conduzione del calore e degli smorzamenti meccanici interni influiscano sull'ampiezza di tali onde. Naturalmente, alla base della trattazione sta, oltre al principio della « fading memory », il fatto che nelle equazioni costitutive entrano delle restrizioni di natura termodinamica. Va notato che gli autori si occupano, oltre che di crescita e decremento delle onde in conduttori definiti, anche del fenomeno in non conduttori, in una successione di paragrafi (dal sesto all'undecimo) sui quali istintivamente ci pare debba rivolgersi una particolare attenzione.

Infine appare una memoria, sempre di B. D. Coleman ed M. E. Gurtin, sulla termodinamica e la velocità delle onde generali di accelerazione. La memoria è costituita da sei paragrafi e prende le mosse da preliminari fisico-matematici, in cui si richiamano intanto alcuni importanti risultati della teoria dell'elasticità finita, indi si passa a nozioni più schiettamente matematiche. (Anzitutto, detti A e B due spazî lineari normati ed N un sottoinsieme aperto di A, si dà la nozione di rappresentazione $a \rightarrow f(a)$ di N su B « N-volte continuamente differenziabile nel senso di Fréchet »). Si passa poi, partendo dall'uso del tensore di Kirchhoff-Piola, allo studio della propagazione in assenza di influenze termodinamiche, ed alla esposizione di ulteriori risultati relativi alla termodinamica dei materiali « con memoria », alle proprietà del tensore acustico, alle onde in conduttori definiti e in non conduttori.

Ampie ed esaurienti le citazioni bibliografiche, bella la veste tipografica, curata dall'editore Springer. Le cinque memorie riportate costituiscono un corpo di dottrina moderno, saldamente legato, il quale è introdotto e sviluppato in una assiomatizzazione stretta e rigorosa.

ANTONIO PIGNEDOLI

A. BLAQUIÈRE, *Nonlinear system analysis*, Academic Press, New York-London, 1966, di pag. 392, prezzo $ 14.50.

L'opera, preceduta da una prefazione di Pierre Grivet, consta di undici capitoli e di una appendice, oltre che di una introduzione dello stesso autore.

Il primo capitolo concerne le premesse intorno ai sistemi lineari e non lineari ed è dotato, come tutti gli altri, di ampi riferimenti bibliografici.

Il secondo capitolo riguarda i cosiddetti « auto-oscillatori », cioè quelli che raggiungono un comportamento stazionario quando il guadagno in energia (che apparirà essere funzione dell'ampiezza) compensa le perdite, su ogni ciclo, in media.

Il terzo capitolo è dedicato alla classificazione delle singolarità e alla loro distribuzione. (Da notare ivi un paragrafo — il sesto del capitolo —, il quale concerne le singolarità tridimensionali). Il quarto capitolo riguarda i sistemi con diversi gradi di libertà ed il quinto la « linearizzazione equivalente ». Il secondo paragrafo di tale quinto capitolo riguarda un modello nell'ottica classica ed il nono il calcolo matriciale nell'analisi dei sistemi non lineari. Il sesto capitolo riguarda quello che si può chiamare « il metodo della funzione descrivente ». Esordisce con l'equazione dei circuiti a retroazione « feedback », li considera nel caso lineare ed in quello non lineare, passa ai diagrammi di Nyquist e di Mikaïlov ed alle applicazioni ai sistemi autonomi e non autonomi. L'ottavo paragrafo del capitolo di cui stiamo parlando riguarda, in particolare, la sensibilità rispetto a piccoli cambiamenti nei parametri. Il capitolo settimo concerne le equazioni non lineari con coefficienti periodici e si diparte dal metodo di perturbazoine. Considera anche applicazioni al problema della stabilità orbitale nel sincrotrone. Il terzo dei quattro paragrafi di tale capitolo è dedicato alla rappresentazione hamiltoniana. L'ottavo capitolo è dedicato alla risposta di un sistema ad impulsi aleatorî. Vi sono considerati in particolare il teorema di Campbell, il metodo di Fokker-Planck e Kolmogorov, nonchè la soluzione dell'equazione di Fokker-Planck-Kolmogorov basata sul teorema di Campbell.

Nel nono capitolo trova posto la trattazione delle fluttuazioni *aleatorie* degli auto-oscillatori, con particolare riguardo al metodo di Bernstein, a quello di Blaquière ed al metodo « quasi-lineare » di Lerner.

L'appendice con cui si conclude l'interessante volume concerne i « modi sinusoidali » dei risuonatori elettromagnetici. Carattere generale dell'opera è una riuscita sintesi dei metodi analitici e topologici, nonchè una attenzione costante alle applicazioni, fino al laser. Abbiamo già avuto occasione di rilevare l'abbondanza dei riferimenti bibliografici. Aggiungeremo ora un doveroso apprezzamento per la felice veste tipografica.

ANTONIO PIGNEDOLI

C. A. COULSON, *Onde*, Problemi matematici della propagazione ondosa, Cremonese, Roma 1967.

È il primo volume di una collezione, diretta da M. Rosati e G. Tedone, che intende offrire a ricercatori, tecnici e studenti una introduzione a studi di carattere più elevato o a colmare le inevitabili lacune della loro cultura.

Il libro consta di 197 pagine di piccolo formato, ma è largamente sufficiente per offrire al lettore una sicura conoscenza dei fenomeni ondosi che si presentano nei vari campi della fisica. L'Autore infatti, ricava in modo rapido, ma chiaro e preciso, le equazioni per le onde nelle corde, nelle membrane, nelle sbarre, nei liquidi, nei gas e nel campo elettromagnetico, dimostrando che esse si riducono alla ben nota equazione di D'Alembert. Può così esporre in modo sintetico le proprietà essenziali dei vari tipi di onde.

Particolarmente notevole mi sembra l'ultimo capitolo in cui si considera l'effetto Döppler, la velocità di gruppo e la sua relazione con la velocità dell'energia, e in cui si ricava la formula di Kirchhoff dei potenziali ritardati che viene applicata, non solo per giustificare il principio di Huygens-Fresnel, ma anche per analizzare i più comuni fenomeni di diffrazione.

È opportuno infine notare il rigore della trattazione, per esempio sono ben messe in chiaro le ipotesi semplificatrici per cui le onde meccaniche si riconducono alla equazione di D'Alembert.

In conclusione, credo di poter affermare veramente felice la scelta di questo libro come il primo della citata collezione.

DARIO GRAFFI

M. ROSEAU, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, Springer Verlag, 1966, pp. XI-254.

In questi ultimi anni sono stati pubblicati numerosi trattati, alcuni dei quali veramente pregevoli, sulla teoria della stabilità e sulle oscillazioni non lineari. Pregevole appare anche il presente libro del Roseau, alquanto differente però dagli altri dedicati all'argomento in discorso, sia per il carattere dell'esposizione, sia per le questioni trattate.

Il Roseau considera sistemi di equazioni differenziali ordinarie che tratta con abile uso dei vettori e delle matrici. Egli si pone dunque in condizioni molto generali, senza però giungere ad eccessi che talvolta portano a complicazioni inutili. Perciò la esposizione è sempre chiara e inoltre su un piano di completo rigore.

Passiamo ora ad esaminare, sommariamente, gli argomenti contenuti nel libro. I primi due capitoli hanno carattere introduttivo e sono dedicati alle proprietà delle matrici e alla risoluzione, mediante le matrici, dei sistemi di equazioni differenziali lineari. Come prima applicazione dei risultati raggiunti, nel terzo capitolo si raffrontano, in sostanza, le proprietà delle soluzioni (per esempio la loro stabilità) di due sistemi differenziali lineari che, al tendere all'infinito della variabile indipendente t, tendono a identificarsi.

Nei due capitoli successivi si inizia lo studio dei sistemi non lineari che, detto x un vettore, si scrivono:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t). \tag{1}$$

Per la (1) vengono stabiliti teoremi di esistenza delle soluzioni e alcune loro proprietà. Inoltre si espone il teorema di Poincaré-Liapunov, che in certi casi permette di comprovare la stabilità o instabilità della soluzione $x = 0$ di (1) (è noto che lo studio della stabilità delle soluzioni in un certo sistema può sempre ricondursi alla stabilità della soluzione identicamente nulla di un sistema analogo) in base alle proprietà della parte lineare, o di prima approssimazione, Ax (A matrice quadrata che si ammette costante) di $f(x, t)$.

Seguono tre capitoli relativi al metodo diretto di Liapunov per lo studio della stabilità e sue applicazioni; in particolare si considera il caso in cui la matrice A dell'approssimazione lineare dipende da t, e li caso più difficile in cui la matrice A ammette un autovalore nullo e gli altri con parte reale negativa.

La stabilità orbitale è poi considerata nel capitolo 11. Nei capitoli 9 e 10, coi metodi di perturbazione secondo Poincaré, si inizia lo studio delle oscillazioni non-lineari. Si dimostra, fra l'altro, l'esistenza di soluzioni periodiche per sistemi debolmente non-lineari che si riducono ad equazioni del secondo ordine prossime a quella del moto armonico, equazioni di notevole interesse nella pratica.

Nei capitoli 12 e 13 si considerano i sistemi debolmente non lineari rappresentati da (1) in cui in luogo di $f(x, t)$ si pone il termine, (termine forzante) $\mu f(x, t, \mu)$, μ parametro molto piccolo, $f(x, t, \mu)$ funzione periodica di t. Di tali sistemi si studia la sincronizzazione anche secondo una sottoarmonica del termine forzante. La trattazione è svolta con molta generalità, ricchezza di risultati e di applicazioni. L'autore si è valso con molta opportunità (come del resto in altre parti del libro) dell'opera di J. Haag, a torto trascurata dai cultori di oscillazioni non-lineari.

Nel capitolo 14 si ritorna alla teoria della stabilità considerando il sistema:

$$\frac{dx}{dt} = (A + \mu R(t, \mu))x \tag{2}$$

con A matrice costante, μ un piccolo parametro $R\,(t, \mu)$ una matrice funzione di t e μ. Supposto gli autovalori di A alcuni con parte reale negativa e altri con parte reale nulla, si determinano condizioni su $R(\mu, t)$ per cui si ha stabilità o instabilità delle soluzioni di (2).

Nel capitolo successivo si considera il sistema:

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) + \mu F(t, x, \mu) \tag{3}$$

dove $P(t)$ matrice, x, $f(t)$, $F(t, x, \mu)$ vettori funzioni periodiche di t con periodo T. Ammesso che per $\mu = 0$ il sistema (3) abbia una o più soluzioni periodiche indipendenti di periodo T, si prova il teorema di Malkin per cui (3) ammette, se μ è sufficientemente piccolo, soluzioni periodiche di periodo T, soluzioni di cui si studia la stabilità. Inoltre si considerano anche eventuali soluzioni nel caso autonomo rappresentato dal sistema (3) in cui si suppone $f = 0$, F indipendente da t e $P(t)$ costante. Nel capitolo sedicesimo si studiano in sostanza le soluzioni di (3) qualora $P(t)$ è costante e $f(t)$ e $F(x, \mu, t)$ sono funzioni quasi periodiche di t. Negli ultimi due capitoli si considerano sistemi fortemente non-lineari e in particolare per questi sistemi viene sviluppata la teoria della sincronizzazione.

Come si è detto l'esposizione è sempre chiara e i risultati ottenuti sono spesso illustrati con esempi concreti. L'autore ha poi premesso una opportuna tabella (detta « plan de lecture ») che permette al lettore di giungere rapidamente ai capitoli che lo interessano in modo particolare.

Ottima la presentazione tipografica.

DARIO GRAFFI

A. M. LIAPUNOV, *Stability of motion*, Academic Press, pp. 203, $ 9.75.

La moderna teoria della stabilità del movimento fu fondata da A. M. Liapunov nella celebre Memoria « Il problema generale della stabilità del movimento » pubblicata nel 1892. Nel 1893 Liapunov pubblicò un lungo lavoro dal titolo: « Ricerche su uno dei casi singolari della teoria della stabilità del movimento ». In questo lavoro si proponeva di trattare alcuni casi dubbi nel problema della stabilità che non erano stati trattati nella celebre Memoria; precisamente il caso in cui il sistema lineare di prima approssimazione avesse due esponenti caratteristici nulli e gli altri a parte reale negativa. Tale lavoro risulta evidentemente incompleto in quanto finisce con il capitolo I° in cui si trattano solo i sistemi del secondo ordine come caso più semplice del caso generale. Recentemente, nel 1954, V. I. Smirnov ha scoperto negli archivi di Liapunov un lungo manoscritto, con lo stesso titolo del suddetto lavoro, in cui vengono risolti in modo generale i casi dubbi citati. Tale manoscritto, di notevole interesse anche perchè i procedimenti usati presentano qualche variante rispetto a quelli della celebre Memoria, fu pubblicato nel 1963 dall'Accademia Sovietica delle Scienze con un lucido sommario di V. P. Basov. La traduzione di tale lavoro con il relativo sommario costituisce la parte fondamentale del volume in considerazione e non c'è che da rilevare l'interesse che questo importante lavoro di Liapunov recentemente scoperto venga fornito in una traduzione inglese.

Il volume oltre a ciò fornisce: la traduzione del lavoro citato del 1893; quella di un altro breve lavoro di Liapunov, pubblicato sempre nel 1893, che mette in evidenza come nei casi in cui vi siano esponenti caratteristici nulli possono effettivamente darsi sia casi di stabilità che di instabilità; infine anche la traduzione di un recente lavoro di A. V. Pliss (1964) in cui si affronta un caso dubbio non trattato da Liapunov e che costituisce un logico completamento.

La presentazione del volume è di Lefschetz e ben possiamo dire con le sue parole che « questo volume si presenta come una benvenuta aggiunta alla crescente letteratura centrata sulla classica teoria della stabilità di Liapunov ».

CARLO BANFI

L. C. BIEDENHARM, H. VAN DAM (Editors), *Quantum theory of angular momentum*, Academic Press, New York and London, 1965, pp. 332, $ 4.95.

Sit ratta di una raccolta di articoli originali di W. Pauli, E. Wigner, P. Güttinger e W. Pauli, E. P. Wigner, G. Racah, L. C. Biedenharn, J. M. Blatt ed M. E. Rose, L. C. Biedenharn, J. P. Elliott, J. Schwinger, H. A. Jahn e J. Hope, A. Arima, H. Horie e Y. Tanabe, T. Regge, V. Bargmann. La raccolta si conclude con tavole algebriche e con un'ampia bibliografia, distinta per libri, monografie, etc.

Notoriamente, il momento angolare ha un ufficio essenziale nella Meccanica teorica classica, ma lo presenta anche oggi, in senso moderno, nella Meccanica quantica. Anzi, modernamente, la teoria del momento angolare, in senso quantico, rappresenta una disciplina indispensabile per chiunque voglia lavorare nel campo della Fisica atomica e molecolare, nonchè nel campo della struttura nucleare. Tale corpo di dottrina va oggi sotto il nome di « Algebra di Racah ».

L'opera alla quale si riferisce la presente recensione prende le mosse da un breve riassunto storico sulla teoria quantica del momento angolare (naturalmente si prendono le mosse dalla quantizzazione, postulata da Bohr nel 1913, del momento angolare orbitale).

Carattere essenziale del libro è quello di presentare la teoria quantica del momento angolare non come sintesi vista da un autore di trattato, ma come riproduzione delle più importanti memorie di insigni ricercatori sull'argomento. Citeremo in particolare, in materia, i classici lavori di Wigner, di Schwinger, dello stesso Racah (del quale qui compaiono quattro memorie sulla teoria degli spettri complessi) e di BARGMANN.

Molto decorosa la veste tipografica.

ANTONIO PIGNEDOLI

G. SERANE, *Mathématiques de la Physique appliquée*, p. 318, Editore Dunod, Paris, 1965, F 34.

Il volume suppone note le basi delle Matematiche generali ed è rivolto ad assicurare ai Fisici un buon « bagaglio matematico » per il loro lavoro di ricercatori od anche di sistematori.

In particalare l'opera assicura al futuro ricercatore nel campo della Fisica la possibilità di affrontare le questioni concernenti il Calcolo delle probabilità e le sue applicazioni fisiche, la Teoria matematica della informazione, la Logica delle macchine calcolatrici, il Calcolo tensoriale etc. Il volume è corredato di 114 figure e si conclude con una esauriente bibliografia.

Consta di otto capitoli: Il primo di essi riguarda le trasformazioni integrali ed è articolato su diciotto paragrafi; il secondo, di ventuno paragrafi, concerne le variabili complesse e si conclude con la teoria del prolungamento analitico.

Il terzo capitolo ed il quarto riguardano, rispettivamente, l'analisi vettoriale ed il calcolo matriciale.

Il quinto capitolo, dedicato al calcolo operatorio, prende prima in considerazione le trasformazioni integrali di Laplace e di Mellin-Fourier, indi passa allo studio della funzione di trasferimento di un sitema fisico. Al paragrafo ventiduesimo (dei ventitre che costituiscono il capitolo) viene esposto il criterio di Nyquist.

Il sesto capitolo, intitolato « equazioni alle derivate parziali », consta di sei paragrafi iniziali, dedicati, appunto, a tali equazioni e di altri cinque che riguardono alcuni delle nozioni essenziali del colcolo delle variazioni.

Il settimo capitolo concerne le funzioni speciali: e si suddivide in sei sotto-titoli. Il primo di essi riguarda le serie di Fourier, il secondo le funzioni ortogonali, il terzo i polinomi di Legendre, il quarto i polinomi di Hermite, il quinto la funzione « gamma » euleriana, il sesto le funzioni di Bessel.

L'ottavo ed ultimo capitolo è dedicato a nozioni riguardanti l'algebra di Boole.

Alla fine del volume appaiono sette paragrafi dedicati ad esercizi: sulle trasformazioni integrali, sulle variabili complesse, sull'analisi vettoriale, sul calcolo matriciale, sul calcolo simbolico, sulle equazioni alle derivate parziali, sulle funzioni speciali.

Gli esercizi vengono proposti al lettore, al quale si fornisce soltanto il risultato.

L'opera, assai utile, appare in veste tipografica molto decorosa.

ANTONIO PIGNEDOLI

Simposio Internazionale sulle applicazioni dell'analisi alla fisica matematica, Edito dall'Unione Matematica Italiana con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Cremonese, Roma, 1965.

Questo libro raccoglie le conferenze tenute al Simposio Internazionale sulle applicazioni dell'analisi alla fisica matematica, simposio che ha avuto luogo a Cagliari e a Sassari dal 28 settembre al 4 ottobre 1964 nel quadro della 48ª riunione della Società Italiana per il progresso delle scienze. Nella prefazione, il prof. Fichera, al quale si deve l'ottima organizzazione del Simposio, dice: « mi ero prefisso di scegliere per il Simposio un tema il quale piuttosto che essere rivolto ad un argomento particolare per specialisti, favorisse un incontro fra studiosi in campi diversi, non tanto lontani tuttavia da non poter trovare una intersezione di comune interesse ». Per questo scopo il tema non poteva essere scelto in maniera più felice; molto spesso nella fisica matematica metodi applicati ad un problema particolare sono risultati fecondi anche per numerose altre questioni. Gli argomenti trattati nel Convegno, al quale hanno partecipato valentissimi studiosi italiani e stranieri, sono, molto in breve, i seguenti: relatività (Cattaneo, Finzi, Lichnerowicz), meccanica dei sistemi continui (De Vito, Grioli, Pastori), equazioni alle derivate parziali della fisica matematica sia da un punto di vista generale (Sobolev) sia per questioni più speciali come ad esempio le equazioni di Navier-Stokes ed equazioni dei fluidi compressibili (Levin e Martin, Lions, Payne, Sauer), calcolo degli autovalori (Fichera, Weinstein), problemi di approssimazione (Collatz, Van der Corput), applicazioni della serie di Lie (Gröbner), diffusione (Pignedoli), questioni di elettromagnetismo (Zin), considerazioni generali sui rapporti fra matematica e applicazioni (Tricomi).

Come si vede da questo rapido elenco gli argomenti del Simposio sono tutti fra i più importanti e attuali della fisica matematica e perciò quanto mai opportuni per quei fruttuosi incontri scientifici auspicati dall'organizzatore.

Il libro è dedicato a Mauro Picone nel suo 80° compleanno: doveroso omaggio ad uno dei più eminenti cultori di analisi applicata alla fisica matematica.

DARIO GRAFFI