Bollettino
Unione Matematica Italiana

Gr. C. Moisil

Sulla sintesi dei circuiti con contatti a relè.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.1, p. 33–44.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_1_33_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Sulla sintesi dei circuiti con contatti a relè

Gr. C. Moisil (Bucarest)

Summary. - *The paper extends the method given by Gr. C. Moisil and Gh. Ioanin* [2], [7] *for the synthesis of the hazard-free automata with contacts and relays, when the transient states of the relays are not neglected.*

1. È conosciuto il fatto che nello studio del funzionamento dei circuiti con contatti e relè non si può trascurare lo stato transitorio del relè nel quale i contatti normalmente aperti non sono ancora chiusi e quelli normalmente chiusi sono già aperti ([1] e [5]). Sia x una variabile che prende il valore 0 nello stato di riposo del relè X, il valore 1 nello stato di lavoro e il valore $\frac{1}{2}$ nello stato transitorio. Se $S = (x, y, \ldots, z)$ è l'insieme ordinato delle variabili associate ai vari relè $X, Y, \ldots, Z$, S può prendere 3^n valori. S è la variabile associata agli stati interni.

Sia K una variabile associata alle entrate, W una variabile associata alle uscite e Ξ una variabile associata ai correnti negli avvolgimenti dei relè $\Xi = (\xi, \eta, \ldots, \zeta)$ dove $\xi = 1$ se nel relè X la corrente circola, $\xi = 0$ se non circola.

Se (*) $\xi_N = 1$ l'elettromagnete attira l'armatura; se $x_N = 0$ l'armatura passa dallo stato di riposo allo stato transitorio $x_{N+1} = \frac{1}{2}$; se $x_N = \frac{1}{2}$ essa passa da quello stato nello stato di lavoro $x_{N+1} = 1$ e se $x_N = 1$ essa rimane nello stato di lavoro $x_{N+1} = 1$.

Se $\xi_N = 0$ il relè non è più eccitato e fa la marcia inversa. Se $\omega(\xi, x)$ è la funzione definita dal:

(1′)

ξ	x	$\omega(\xi, x)$
0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$

ξ	x	$\omega(\xi, x)$
1	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1

(*) Chiameremo v_N il valore della variabile v nell' N-esimo intervallo di tempo.

allora

$$x_{N+1} = \omega(\xi_N, x_N). \tag{1''}$$

Un'equazione simile vale per ognuno dei relè. Si può dunque scrivere

$$S_{N+1} = \Omega(\Xi_N, S_N). \tag{2}$$

Lo stato Ξ_N della corrente negli avvolgimenti dei relè è conosciuto quando si danno le posizioni dei contatti dei relè, dunque lo stato interno S_N e lo stato delle entrate, dunque

$$\Xi_N = \Psi(K_N, S_N). \tag{3}$$

Da (2) e (3) si ha, eliminando Ξ_N:

$$S_{N+1} = F(K_N, S_N). \tag{4}$$

Le uscite W_N dipendono dallo stato delle entrate e dallo stato interno

$$W_N = G(K_N, S_N). \tag{5}$$

Le equazioni (4) e (5) mostrano che i circuiti con contatti e relè quando non si trascurano gli stati transitori sono degli automati finiti [7].

I vari stati interni

$$S = (x, \dots, z)$$

sono di vari tipi. Chiameremo *stato estremo* uno stato S per il quale $x, \dots, z$ sono 0 o 1, e *stato transitorio*, uno stato per il quale uno degli $x, \dots, z$ è $\frac{1}{2}$ gli altri essendo 0 o 1. Uno *stato stabile* è uno stato estremo. Se S è uno stato transitorio, esso determina due stati estremi, fra i quali esso fa la transizione.

Noi supporremo che i relè si eccitano e si diseccitano uno ad uno, dunque che se nel sistema $(x, \dots, z)$ due almeno delle variabili $x, \dots, z$ hanno il valore $\frac{1}{2}$, questo sistema non è uno stato interno. Questa supposizione semplifica i calcoli.

2. Per spiegare il nostro metodo di sintesi prenderemo un esempio. Supporremo che i comandi siano dati tramite un relè A

azionato da un interruttore B; associamo ad A una variabile a che prende i valori $0, \frac{1}{2}, 1$. Supponiamo che l'uscita sia una lampada di segnalazione W alla quale sarà associata una variabile w che prende il valore $w = 1$ quando la lampada è accesa, $w = 0$ quando è spenta. Le equazioni (4) e (5) sono

$$S_{N+1} = F(a_N, S_N)$$

$$w_N = G(a_N, S_N).$$

Vogliamo soddisfare il seguente programma.

I. Nel riposo, il relè A essendo non eccitato, la lampada è spenta.

II. Se il relè A si eccita la lampada si accende.

III. Se il relè A è diseccitato la lampada rimane accesa.

IV. Se il relè A si eccita di nuovo la lampada si spegne.

V. Se il relè A è diseccitato si riviene nello stato di riposo.

Il metodo che vogliamo usare è analogo a quello dato da IOANIN e da noi quando si trascurano gli stati di transizione ([2] e [7] pp. 467-600).

Sia S_0 lo stato di riposo; esso è stabile per $a = 0$ e la condizione I dà

$$F(0, S_0) = S_0 \tag{6'}$$

$$G(0, S_0) = 0. \tag{6''}$$

Quando il relè A si eccita, a passa da 0 a $\frac{1}{2}$ poi a 1 e la lampada si accende. Possiamo tradurre la condizione II con

$$F\left(\frac{1}{2}, S_0\right) = S_1 \tag{7'}$$

$$F(1, S_1) = S_2 \tag{8'}$$

(9′) $F(1, S_2) = S_2$ (9″) $G(1, S_2) = 1.$

Quando il relè A si diseccita a passa da 1 a $\frac{1}{2}$ poi a 0 e la lampada rimane accesa. Possiamo tradurre le condizioni II con

(10′) $F\left(\frac{1}{2}, S_2\right) = S_3$ (10″) $G\left(\frac{1}{2}, S_2\right) = 1$

(11′) $F(0, S_3) = S_4$ (11″) $G(0, S_3) = 1$

(12′) $F(0, S_4) = S_4$ (12″) $G(0, S_4) = 1.$

Quando il relè A si eccita di nuovo la lampada si spegne

(13′) $F\left(\frac{1}{2}, S_4\right) = S_5$

(14′) $F(1, S_5) = S_6$

(15′) $F(1, S_6) = S_6$ (15″) $G(1, S_6) = 0$

e quando il relè A si diseccita, si riviene alla posizione di riposo, la lampada rimanendo spenta

(16′) $F\left(\frac{1}{2}, S_6\right) = S_7$ (16″) $G\left(\frac{1}{2}, S_6\right) = 0$

(17′) $F(0, S_7) = S_0$ (17″) $G(0, S_7) = 0.$

La traduzione (7′)-(17″) delle condizioni II-V non è l'unica possibile.

3. La comparazione delle equazioni (6″), (17′) e (11″), (12″) mostra che

(18)
$$\begin{aligned} S_0 &\neq S_3 \qquad S_0 \neq S_4 \\ S_7 &\neq S_3 \qquad S_7 \neq S_4 . \end{aligned}$$

La comparazione delle equazioni (9″) e (15″), oppure (10″) e (16″) mostra che

(19)
$$S_2 \neq S_6 .$$

La comparazione delle equazioni (8′), (9′), (14′), (15′) dà

(20)
$$\begin{aligned} (S_1 = S_5) &\Rightarrow (S_2 = S_6) \\ (S_1 = S_6) &\Rightarrow (S_2 = S_6) \end{aligned}$$

e quella delle equazioni (7′), (10′), (13′), (16′)

(21)
$$(S_0 = S_2) \Rightarrow (S_1 = S_3)$$

$$(S_0 = S_6) \Rightarrow (S_1 = S_7)$$
$$(S_2 = S_4) \Rightarrow (S_3 = S_5)$$
$$(S_4 = S_6) \Rightarrow (S_5 = S_7).$$

Le equazioni (19) e (20) danno

(22) $$S_1 \neq S_5 \qquad S_1 \neq S_6 \,.$$

4. Per ottenere nuove disuguaglianze faremo uso dell'osservazione fatta alla fine del § 1: gli stati S_0, S_2, S_4 e S_6 sono stati estremi perchè le equazioni (6'), (9'), (13'), (15') ci assicurano che questi stati sono stabili. Dunque ognuna delle evoluzioni

(23) $$\begin{matrix} (S_0\,, \; S_1\,, \; S_2)\,, & (S_2\,, \; S_3\,, \; S_4) \\ (S_4\,, \; S_5\,, \; S_6)\,, & (S_6\,. \; S_7\,, \; S_0) \end{matrix}$$

è formata di tre stati identici, oppure lo stato mediano è lo stato transitorio fra gli altri due. Dunque

(24) $$\begin{matrix} (S_0 = S_4) \Leftrightarrow (S_1 = S_3) \\ (S_2 = S_6) \Leftrightarrow (S_3 = S_5) \\ (S_4 = S_0) \Leftrightarrow (S_5 = S_7) \\ (S_6 = S_2) \Leftrightarrow (S_7 = S_1)\,. \end{matrix}$$

5. Le equazioni (24) e (18) danno

(25) $$S_1 \neq S_3 \qquad S_5 \neq S_7$$

e le equazioni (24) e (19) danno

(26) $$S_3 \neq S_5 \qquad S_1 \neq S_7 \,.$$

Queste equazioni (25), (26) con (21) danno

(27) $$\begin{matrix} S_0 \neq S_2 & \qquad S_0 \neq S_6 \\ S_2 \neq S_4 & \qquad S_4 \neq S_6 \,. \end{matrix}$$

Le equazioni (18) e (27) mostrano che i quattro stati estremi S_0, S_2, S_4, S_6 sono diversi, dunque sono necessari due relè.

6. Il problema della della codificazione degli stati interni (in inglese «assignement») si pone nel nostro caso in un modo differente dal caso classico:

1) gli stati stabili devono essere codificati da stati estremi

e

2) gli stati intermediari fra stati stabili devono essere codificati da stati transitori fra i due stati estremi.

Possiamo codificare i quattro stati stabili come segue:

(28′)

	x	y
S_0	0	0
S_2	0	1
S_4	1	1
S_6	1	0

in conseguenza gli stati intermediari saranno codificati da

(28″)

	x	y
S_1	0	$\frac{1}{2}$
S_3	$\frac{1}{2}$	1
S_5	1	$\frac{1}{2}$
S_7	$\frac{1}{2}$	0.

Il sistema di equazioni (4), (5) si scrive

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= f(a_N,\ x_N,\ y_N) \\ y_{N+1} &= g(a_N,\ x_N,\ y_N) \\ w_N &= h(a_N,\ x_N,\ y_N) \end{aligned} \tag{29}$$

e le equazioni (6′)-(17″) divengono

(30′) $f(0,\ 0,\ 0) = 0$ (30″) $g(0,\ 0,\ 0) = 0$ (30‴) $h(0,\ 0,\ 0) = 0$

(31′) $f\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right) = 0$ (31″) $g\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right) = \frac{1}{2}$

$$
\begin{array}{lll}
(32')\ f\left(1,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)=0 & (32'')\ g\left(1,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)=1 & \\
(33')\ f(1,\ 0,\ 1)=0 & (33'')\ g(1\ \ 0,\ 1)=1 & (33''')\ h(1,\ 0,\ 1)=1 \\
(34')\ f\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 1\right)=\frac{1}{2} & (34'')\ g\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 1\right)=1 & (34''')\ h\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 1\right)=1 \\
(35')\ f\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)=1 & (35'')\ g\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)=1 & (35''')\ h\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)=1 \\
(36')\ f(0,\ 1,\ 1)=1 & (36'')\ g(0,\ 1,\ 1)=1 & (36''')\ h(0,\ 1,\ 1)=1 \\
(37')\ f\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)=1 & (37'')\ g\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)=\frac{1}{2} & \\
(38')\ f\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right)=1 & (38'')\ g\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right)=0 & \\
(39')\ f(1,\ 1,\ 0)=1 & (39'')\ g(1,\ 1,\ 0)=0 & (39''')\ h(1,\ 1,\ 0)=0 \\
(40')\ f\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)=\frac{1}{2} & (40'')\ g\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)=0 & (40''')\ h\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 0\right)=0 \\
(41')\ f\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)=0 & (41'')\ g\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)=0 & (41''')\ h\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right)=0.
\end{array}
$$

7. L'equazione (1'') dà

$$\xi_N = \theta(x_N,\ x_{N+1}) \tag{42'}$$

dove θ è dato da:

(42'')

x_N	x_{N+1}	$\theta(x_N,\ x_{N+1})$	x_N	x_{N+1}	$\theta(x_N,\ x_{N+1})$
0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1
1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1

la funzione θ non essendo definita per le altre coppie di variabili.

Le equazioni (29) con (42'), (42''')

$$\eta_N = \theta(y_N,\ y_{N+1}) \tag{42''}$$

danno

$$\xi_N = \varphi(a_N, \; x_N, \; y_N) \tag{43}$$
$$\eta_N = \psi(a_N, \; x_N, \; y_N).$$

Le funzioni φ, ψ soddisfano alle condizioni (44′)-(55″)

(44′) $\varphi(0, \; 0, \; 0) = 0$ (44″) $\psi(0, \; 0, \; 0) = 0$

(45′) $\varphi\left(\frac{1}{2}, \; 0, \; 0\right) = 0$ (45″) $\psi\left(\frac{1}{2}, \; 0, \; 0\right) = 1$

(46′) $\varphi\left(1, \; 0, \; \frac{1}{2}\right) = 0$ (46″) $\psi\left(1, \; 0, \; \frac{1}{2}\right) = 1$

(47′) $\varphi(1, \; 0, \; 1) = 0$ (47″) $\psi(1, \; 0, \; 1) = 1$

(48′) $\varphi\left(\frac{1}{2}, \; 0, \; 1\right) = 1$ (48″) $\psi\left(\frac{1}{2}, \; 0, \; 1\right) = 1$

(49′) $\varphi\left(0, \; \frac{1}{2}, \; 1\right) = 1$ (49″) $\psi\left(0, \; \frac{1}{2}, \; 1\right) = 1$

(50′) $\varphi(0, \; 1, \; 1) = 1$ (50″) $\psi(0, \; 1, \; 1) = 1$

(51′) $\varphi\left(\frac{1}{2}, \; 1, \; 1\right) = 1$ (51″) $\psi\left(\frac{1}{2}, \; 1, \; 1\right) = 0$

(52′) $\varphi\left(1, \; 1, \; \frac{1}{2}\right) = 1$ (52″) $\psi\left(1, \; 1, \; \frac{1}{2}\right) = 0$

(53′) $\varphi(1, \; 1, \; 0) = 1$ (53″) $\psi(1, \; 1, \; 0) = 0$

(54′) $\varphi\left(\frac{1}{2}, \; 1, \; 0\right) = 0$ (54″) $\psi\left(\frac{1}{2}, \; 1, \; 0\right) = 0$

(55′) $\varphi\left(0, \; \frac{1}{2}, \; 0\right) = 0$ (55″) $\psi\left(0, \; \frac{1}{2}, \; 0\right) = 0.$

I valori delle funzioni $\varphi(a, x, y)$, $\psi(a, x, y)$ sono conosciuti per 12 sistemi di valori delle variabili a, x, y ma essi non sono determinati negli altri 15 sistemi.

8. Le funzioni $\varphi(a, x, y)$, $\psi(a, x, y)$ possono essere rappresentate sul cubo. Nelle figure 1, 2 abbiamo notato con ● i punti nei quali la funzione prende il valore 1, con O quelli nei quali essa ha valore indeterminato.

9. Daremo alle funzioni φ, ψ il valore 1 nei punti notati con $\otimes$. Siano $L_\alpha(x)$ le funzioni definite da

$$L_\alpha(\alpha) = 1 \qquad L_\alpha(\beta) = 0 \qquad \alpha \neq \beta.$$

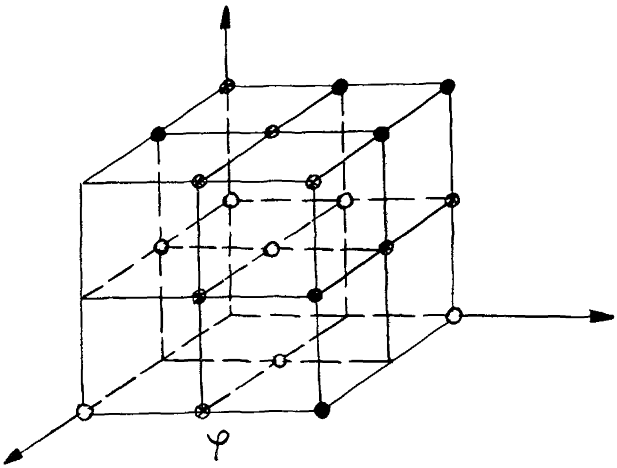

Fig. 1

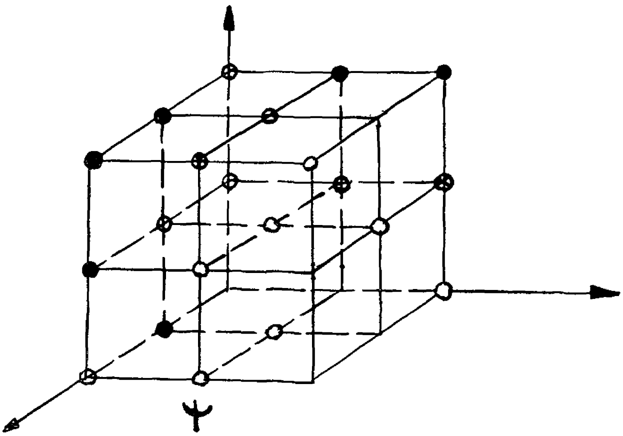

Fig. 2

Si vede che

$$
\begin{aligned}
\varphi(a,\ x,\ y) = {} & [L_{\frac{1}{2}}(a) \cup L_0(a)][L_1(x) \cup L_{\frac{1}{2}}(x) \cup L_0(x)]L_1(y) \cup \\
& \cup [L_{\frac{1}{2}}(x) \cup L_1(x)][L_1(a) \cup L_{\frac{1}{2}}(a) \cup L_0(a)]L_1(y) \cup \\
& \cup [L_{\frac{1}{2}}(y) \cup L_1(y)][L_1(a) \cup L_{\frac{1}{2}}(a) \cup L_0(a)]L_1(x) \cup \\
& \cup [L_{\frac{1}{2}}(x) \cup L_1(x)][L_1(y) \cup L_{\frac{1}{2}}(y) \cup L_0(y)]L_1(a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi(a,\ x,\ y) = {} & [L_{\frac{1}{2}}(y) \cup L_1(y)][L_1(a) \cup L_{\frac{1}{2}}(a) \cup L_0(a)]L_0(x) \cup \\
& \cup [L_{\frac{1}{2}}(a) \cup L_1(a)][L_1(y) \cup L_{\frac{1}{2}}(y) \cup L_0(y)]L_0(x) \cup \\
& \cup [L_0(x) \cup L_{\frac{1}{2}}(x)][L_1(a) \cup L_{\frac{1}{2}}(a) \cup L_0(a)]L_1(y) \cup \\
& \cup [L_{\frac{1}{2}}(y) \cup L_1(y)][L_1(x) \cup L_{\frac{1}{2}}(x) \cup L_0(x)]L_0(a).
\end{aligned}
$$

Come si vede senza difficoltà

$$L_1(z) \cup L_{\frac{1}{2}}(z) \cup L_0(z) = 1$$

dunque, chiamando

$$L_{\frac{1}{2}}(z) \cup L_1(z) = z^1$$

$$L_1(z) = z^2$$

si ha

$$L_0(z) = \bar{z}^1$$

$$L_{\frac{1}{2}}(z) \cup L_0(z) = \bar{z}^2$$

dunque

$$\varphi(a,\ x,\ y) = \bar{a}^2 y^2 \cup x^1 y^2 \cup y^1 x^2 \cup x^1 a^2$$

$$\psi(a,\ x,\ y) = \bar{x}^1 y^1 \cup a^1 \bar{x}^1 \cup \bar{x}^2 y^2 \cup \bar{a}^1 y^1$$

dunque

$$\varphi(a,\ x,\ y) = y^2\, \overline{a^2 \bar{x}^1} \cup x^2 \bar{\bar{y}}^1 \cup a^2 \bar{\bar{x}}^1$$

$$\psi(a,\ x,\ y) = x^1\, \overline{\bar{a}^1 \bar{y}^1} \cup y^2 \bar{x}^2 \cup \bar{a}^1 \bar{\bar{y}}^1.$$

Le equazioni $(30''')$, $(33''')$-$(36''')$, $(39'')$-$(41''')$ danno per $h(a, x, y)$ la figura 3:

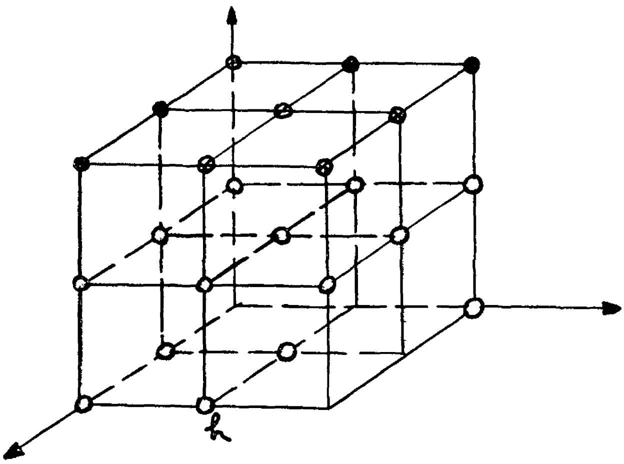

Fig. 3

dunque

$$h(a, x, y) = y.$$

Si vede senza difficoltà che il circuito cercato è quello della fig. 4, essendo $\bar{x}^1$ e x^2 le funzioni della variabile x che prendono

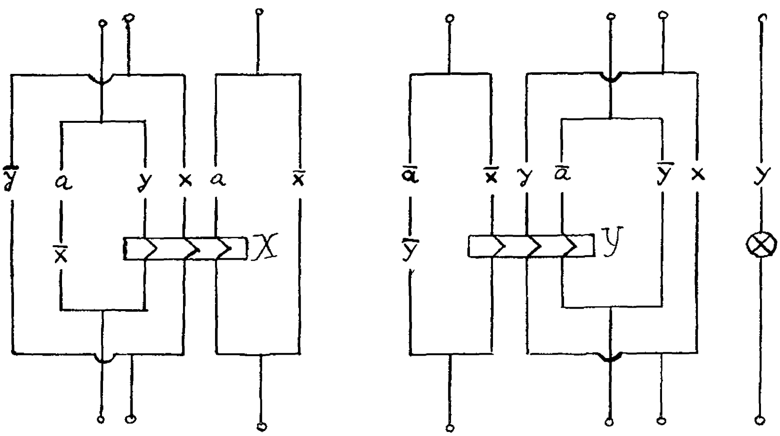

Fig 4

il valore 1 quando il contatto normalmente chiuso $\bar{x}^1$, oppure normalmente aperto x^2 (fig. 5) sono chiusi, 0 quando sono aperto.

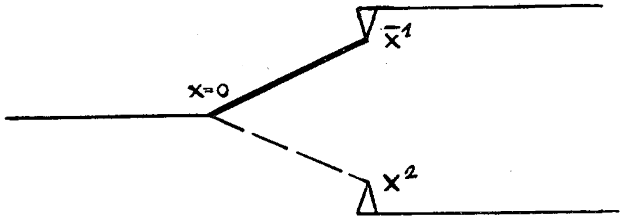

Fig. 5

BIBLIOGRAFIA

[1] BRUNIN, *Logique binaire et commutation*, Dunod Paris 1966.

[2] G. IOANIN, G. C. MOISIL, *La synthèse des schémas à contacts et relais avec des conditions données pour les éléments executifs*, « Revue des mathématiques pures et appliquées », Bucarest, Académie de la R. S. Roumaine I, 1956, 489.

[3] E. J. MC CLUSKEY, *Introduction to the theory of switching circuits*, Mc Graw Hill Book Company 1965.

[4] G. C. MOISIL, *Théorie structurelle des automates finis*, Paris, Gauthier Villars, 1966.

[5] — —, *An algebraic theory on the actual operation of relay switching circuits*, Circular Letter N. 5, « Hazard and race phenomena in switching circuits », pubblicate dal « Institutul de matematică al Academiei R. S. Romania » e dal « Centrul de Calcul al Universităţii Bucaresti », 1964.

[6] — —, *Zastosowanie algebr Lukasiewicz do teorii ukladow przekaznikowo-stychonych* (Applications de l'algèbre de Lukasiewicz à la théorie des circuits à contacts et relais), Conferences faites à Jablona en may 1966, pubbliées par l'Académie Polonaise des Sciences.

[7] — —, *Teoria algebrica a mecanismelor automate*, Bucarest, Editura Tehnică 1959.

[8] P. NASLIN, *Circuits à relais et automatismes à séquences*, Paris, Dunod, 1965.

[9] JEAN-PAUL PERRIN, MICHEL DENOUETTE et ERIC DACLIN, *Methodes modernes d'étude des systèmes logiques*, Ecole Nationale Supérieure de l'Aeronautique, Centre d'etudes et de recherches en automatisme, 1966.

[10] D. ZISSOS et G. W. COPPERWHILE, *Seminar on nor/nand switching Circuits*, 20 mai 1966. Liverpool Regional College of Technology. Department of electrical engineering.

Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I.
il 1 settembre 1966