
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROMANO SCOZZAFAVA

Singularità debolmente rimovibili per soluzioni di equazioni ellittiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 21
(1966), n.4, p. 406–415.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_4_406_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Singularità debolmente rimovibili per soluzioni di equazioni ellittiche

ROMANO SCOZZAFAVA (Roma) (*)

Sunto. - *Si considerano singularità su varietà per soluzioni di equazioni ellittiche non lineari del secondo ordine, e si stabiliscono condizioni sufficienti affinché tali singularità siano "debolmente" rimovibili. La dimostrazione è basata sull'impiego di una combinazione lineare di particolari soluzioni delle equazioni ellittiche estremanti.*

Summary. - *We deal with singularities on manifolds for solutions of second-order non-linear elliptic equations with discontinuous coefficients. Sufficient conditions in order to such singularities be "weakly" removable are established.*

1. - Introduzione.

Sia Ω un insieme aperto limitato dello spazio reale R^m ad m dimensioni e sia u soluzione in $\Omega - N$ di una data equazione a derivate parziali, con N insieme chiuso e di misura nulla contenuto in Ω . Se si può prolungare u con continuità in tutto Ω , N costituisce per la u una singolarità rimovibile. Ad esempio, la rimovibilità di N può essere assicurata stabilendo opportune condizioni sul comportamento di u in prossimità di N e sulla dimensione di N .

Molte ricerche riguardano il caso che N si riduca ad un solo punto. In particolare, risultati di questo tipo sono ben noti per l'equazione di LAPLACE (cfr. ad es. KELLOGG [3]). Nel caso di equazioni ellittiche del secondo ordine, GILBARG e SERRIN in [2] hanno studiato il problema per equazioni lineari a coefficienti continui, e SERRIN in [7] per equazioni variazionali non lineari.

Nel caso che N sia una varietà, il problema è stato trattato da CARLESON [1], da SERRIN [6], [8], e da LITTMAN [4], rispettivamente per l'equazione di LAPLACE, per equazioni ellittiche lineari del secondo ordine a coefficienti hölderiani o di tipo variazionale, e per equazioni lineari autoaggiunte di ordine qualsiasi. In partico-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca u. 23 del CNR, a. a. 1966-67.

lare SERRIN ha provato che la singolarità N è rimovibile, con N varietà s -dimensionale, $0 \leq s \leq m-2$, se risulta $u \in L^p$, con

$$(1) \quad p = \frac{m-s}{m-s-2},$$

oppure se esiste una costante $\delta > 0$ tale che

$$u(x) = O(\rho^{2-m+s+\delta}), \quad 0 \leq s < m-2$$

$$u(x) = O(|\lg \rho|^{1-\delta}), \quad s = m-2$$

per $\rho \rightarrow 0$, dove ρ indica la distanza di x da N .

Nell'analisi delle singolarità si possono considerare condizioni più deboli di quelle che il $\lim_{x \rightarrow N} u(x)$ risulti determinato e finito. Se si suppone l'esistenza di un $\tau > 0$ tale che

$$(2) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} u \rho^\tau = 0,$$

e se dalla (2) è possibile dedurre che la u si mantiene limitata per $\rho \rightarrow 0$, N si può chiamare una singolarità «debolmente» rimovibile.

In particolare, si può richiedere che la (2) implichi che valga la seguente proprietà:

P. - Per ogni insieme aperto B , $\bar{B} \subset \Omega$ ed $N \subset B$, risulta

$$(3) \quad |u(x)| \leq \max_{\xi \in \partial B} |u(\xi)|, \quad x \in B - N.$$

Nel caso di singolarità isolate, GILBARG e SERRIN in [2] hanno stabilito vari casi di validità della proprietà P (che essi hanno chiamato «extended maximum principle») nell'ipotesi che i coefficienti siano continui. Essi hanno anche provato con un esempio che, se nel punto singolare i coefficienti non sono continui, la (3) può non sussistere.

Singolarità isolate debolmente rimovibili per equazioni ellittiche non lineari a coefficienti misurabili sono state studiate da PUCCI in [5].

Per equazioni ellittiche variazionali lineari, SERRIN e WEINBERGER in [9] hanno esaminato il comportamento della soluzione in un punto singolare non rimovibile.

In questa nota si considerano soluzioni $u(x)$ di una classe di equazioni ellittiche non lineari del secondo ordine, supponendo che

l'insieme singolare N appartenga ad una varietà « regolare », s -dimensionale V , contenuta in Ω , con $0 \leq s < m - 2$. Indipendentemente da ipotesi di continuità sui coefficienti si dimostra che, se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} u \rho^\tau = 0,$$

dove τ è una costante dipendente solo dall'operatore considerato e dalla dimensione s di V , allora vale la proprietà P. Questi risultati vengono stabiliti estendendo la tecnica usata in [5] nello studio di singolarità isolate: si utilizzano opportunamente delle combinazioni lineari di soluzioni « estremanti » (n. 2) dipendenti solamente dalla distanza da un punto. Si prova con un esempio che nel caso qui considerato di coefficienti discontinui la condizione $u \in L^p$, con p dato dalla (1), non è sufficiente per la validità della (3).

2. - Notazioni e richiami.

Siano α, β, γ costanti non negative, con $\alpha \leq \frac{1}{m}$. Indichiamo con $\mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}$ la classe delle funzioni $F(u_{ij}, u_i, u, x)$ che sono definite e misurabili (per qualunque valore reale di u_{ij}, u_i, u , con $i, j = 1, 2, \dots, m$) per x in Ω , e che sono inoltre (per ogni fissato x in Ω) continue e quasi ovunque differenziabili in u_{ij}, u_i, u e verificanti le condizioni:

$$\sum_{i,j}^{1,m} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \lambda_i \lambda_j \geq \alpha |\lambda|^2, \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial u_i} = 1;$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} \right)^2 \leq \beta^2;$$

$$-\gamma \leq \frac{\partial F}{\partial u} \leq 0;$$

$$F(0, 0, 0, x) = 0.$$

Se $u \in C^{1,1}(\Omega)$, posto $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, si può riguardare

$$F[u] = F[u_{ij}(x), u_i(x), u(x), x]$$

come un operatore differenziale ellittico. Indichiamo in particolare

con $\mathcal{L}_{\alpha, \beta, \gamma}$ la classe degli operatori lineari (a coefficienti misurabili)

$$L[u] = \sum_{i,j}^{1,m} a_{ij}(x)u_{,j} + \sum_{i=1}^m b_i(x)u_{,i} + c(x)u$$

appartenenti ad $\mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}$.

Richiamiamo ora alcuni risultati di PUCCI [5], utilizzati nel seguito.

I. - Fissata una funzione $u \in C^{1,1}(\Omega)$ ed un operatore $F \in \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}$, esiste in corrispondenza un operatore $L \in \mathcal{L}_{\alpha, \beta, \gamma}$, con $L[u] = F[u]$ quasi ovunque in Ω .

Se u è una funzione dotata di differenziale secondo in un punto, indicato con $\mathcal{C}[u]$. $i = 1, 2, \dots, m$ gli autovalori della matrice hessiana di u in quel punto, con il seguente ordinamento

$$\mathcal{C}_1[u] \leq \mathcal{C}_2[u] \leq \dots \leq \mathcal{C}_m[u],$$

consideriamo i seguenti operatori differenziali

$$M_{\alpha, \beta, \gamma}[u] = \alpha \sum_{i=1}^{m-1} \mathcal{C}_i[u] + (1 - (m-1)\alpha)\mathcal{C}_m[u] + \beta |\text{grad } u| - \gamma \frac{u - |u|}{2},$$

$$m_{\alpha, \beta, \gamma}[u] = (1 - (m-1)\alpha)\mathcal{C}_1[u] + \alpha \sum_{i=2}^m \mathcal{C}_i[u] - \beta |\text{grad } u| - \gamma \frac{u + |u|}{2},$$

Risulta quasi ovunque in Ω :

$$M_{\alpha, \beta, \gamma}[u] = -m_{\alpha, \beta, \gamma}[-u].$$

II. - Gli operatori $M_{\alpha, \beta, \gamma}$ e $m_{\alpha, \beta, \gamma}$ appartengono alla classe $\mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}$, e si ha

$$M_{\alpha, \beta, \gamma}[u] = \max_{F \in \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}} F[u],$$

$$m_{\alpha, \beta, \gamma}[u] = \min_{F \in \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}} F[u],$$

per ogni funzione $u \in C^{1,1}(\Omega)$.

Consideriamo ora le funzioni della distanza da un punto x^0 , soluzioni dell'equazione « estremante »

$$(4) \quad M_{\alpha, \beta, \gamma}[u] = 0.$$

Posto $r = |x - x^0|$, se u dipende solo da r risulta

$$M_{\alpha, \beta, \gamma}[u] = h \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1-h}{r} \frac{du}{dr} + \beta \left| \frac{du}{dr} \right| - \gamma \frac{u - |u|}{2},$$

con

$$h = \alpha \quad \text{se} \quad \frac{d^2 u}{dr^2} \leq \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$$

$$h = 1 - (m-1)\alpha \quad \text{se} \quad \frac{d^2 u}{dr^2} \geq \frac{1}{r} \frac{du}{dr}.$$

Nel caso particolare $\gamma = 0$, la (4) ammette per $0 < |x - x^0| \leq r_0$ la soluzione

$$(5) \quad g = \int_r^{r_0} (t^{(1-m)\alpha} e^{\beta t})^{\frac{1}{1-(m-1)\alpha}} dt.$$

In particolare, se $0 < \alpha \leq \frac{1}{m}$ e $\beta = 0$, sono soluzioni di $M_{\alpha, 0, 0}[u] = 0$ le funzioni

$$(6) \quad g_1 = -\log r, \quad \text{per} \quad \alpha = \frac{1}{2(m-1)};$$

$$(7) \quad g_2 = r^{\frac{1-2(m-1)\alpha}{1-(m-1)\alpha}}, \quad \text{per} \quad \alpha > \frac{1}{2(m-1)};$$

$$(8) \quad g_3 = -r^{\frac{1-2(m-1)\alpha}{1-(m-1)\alpha}}, \quad \text{per} \quad \alpha < \frac{1}{2(m-1)}.$$

Per $\alpha = \frac{1}{m}$ si ha $M_{\alpha, 0, 0} = \Delta$, e le (6), (7) danno le funzioni armoniche fondamentali.

3. - Analisi delle singolarità.

Sia V_s una varietà semplicemente connessa di dimensione $s < m$, contenuta in Ω e soddisfacente per $s > 0$ alle seguenti ipotesi:

a) V_s è unione di un numero finito di insiemi chiusi Σ^k , a due a due senza punti interni in comune, e ciascuno dotato di

rappresentazione parametrica del tipo

$$(9) \quad y_i = y_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

con $t = (t_1, t_2, \dots, t_s) \in S_s$, sfera chiusa unitaria dello spazio R^s ;

b) le funzioni $y_i(t)$ sono continue con le loro derivate prime in S_s , e la loro matrice jacobiana ha caratteristica s ;

c) esiste una costante $\rho_0 > 0$ tale che, fissato comunque $y \in V_s$, e considerata in R^m la sfera $S_m(y, \rho)$, di centro y e raggio $\rho \leq \rho_0$, la misura (superficiale) dell'insieme $S_m(y, \rho) \cap V_s$ è maggiore di $\frac{1}{3} \omega_s \frac{\rho^s}{s}$ ⁽¹⁾.

Si può dimostrare che c) è conseguenza di a) e b).

Poniamo $r = |x - y|$. Fissato y su V_s , $s > 0$, se $g(r)$ come funzione di x è soluzione della (4), introdotta la funzione, definita in $\Omega - V_s$,

$$(10) \quad w(x) = \int_{V_s} g(|x - y|) d\sigma_y,$$

in base ai teoremi I e II si ha in $\Omega - V_s$

$$(11) \quad M_{\alpha, \beta, \gamma}[w] = L[w] = \int_{V_s} L[g] d\sigma_y \leq \int_{V_s} M_{\alpha, \beta, \gamma}[g] d\sigma_y = 0.$$

Ciò premesso, dimostriamo il seguente teorema:

III. - Indichiamo con V_s una varietà semplicemente connessa di dimensione $s < m$, contenuta in Ω e soddisfacente, per $s > 0$, alle ipotesi a), b), e sia N un insieme chiuso appartenente a V_s . Sia u una funzione di classe $C^{1,1}(\Omega - N)$ tale che

$$F[u] = 0 \quad \text{in } \Omega - N, \quad F \in \mathcal{F}_{\alpha, \beta, 0},$$

con $0 < \alpha \leq \frac{1}{m}$ e $\beta \geq 0$. Detta $g(r)$ la soluzione di $M_{\alpha, \beta, 0}[g] = 0$ data dalla (5), e definita per $s > 0$ ⁽²⁾ la funzione (positiva) $w(x)$ in $\Omega - V_s$,

⁽¹⁾ ω_m indica la misura della superficie sferica unitaria di R^m .

⁽²⁾ Per $s = 0$ il teorema sussiste assumendo $w = g(r)$.

mediante la (10), se si ha

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow V_s} w = +\infty,$$

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow V_s} \frac{u}{w} = 0,$$

vale la proprietà P.

Dimostriamo che se valgono le (12), (13) non vi può essere un insieme aperto B' , con $N \subset B'$ e $\bar{B}' \subset \Omega$, ed un punto $x' \in B' - N$ tali che

$$(14) \quad u(x') > \max_{\xi \in \partial B'} u(\xi).$$

Infatti, indicato con ξ^0 un punto di $\partial B'$ tale che

$$(15) \quad \max_{\xi \in \partial B'} u(\xi) = u(\xi^0).$$

dalla validità della (14) seguirebbe che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$cw(x') < u(x') - u(\xi^0).$$

Pertanto l'insieme E dei punti $x \in B' - N$ tali che

$$(16) \quad u(\xi^0) + cw(x) < u(x)$$

risulta non vuoto. Inoltre, in virtù delle (12), (13), la (16) implica che esiste un insieme aperto $I \subset B'$ e non appartenente ad E , tale che $N \subset I$. Quindi, per la continuità di u e w in $\Omega - N$, E è aperto e

$$u(\xi^0) + cw - u = 0 \quad \text{su} \quad \partial E,$$

essendo vuoto, per la (15), l'insieme $\bar{E} \cap \partial B'$. Per il teor. I esiste un operatore L lineare con

$$L[u] = 0 \quad \text{in} \quad \Omega - N, \quad L \in \mathcal{L}_{\alpha, \beta, 0},$$

e quindi, tenendo conto del teor. II e della (11):

$$L[u(\xi^0) + cw - u] = cL[w] \leq cM_{\alpha, \beta, 0}[w] \leq 0 \quad \text{in} \quad E,$$

cioè, per il principio di massimo,

$$u(\xi^0) + cv(x) - u(x) \geq 0 \quad \text{in } E,$$

in contraddizione con la definizione (16) di E . Ripetendo le stesse considerazioni per la funzione $-u$ si completa la dimostrazione del teorema.

Al teor. III si può dare una formulazione più esplicita nel caso particolare $\beta = 0$ e $0 \leq s < m - 2$.

IV. - Sia V_s una varietà s -dimensionale semplicemente connessa contenuta in Ω , con $0 \leq s < m - 2$, e soddisfacente per $s > 0$ alle ipotesi a), b), c). Detto N un insieme chiuso, con $N \subset V_s$, sia

$$F[u] = 0 \quad \text{in } \Omega - N, \quad F \in \mathcal{F}_{\alpha, 0, 0},$$

con $0 < \alpha < \frac{1}{m}$. Per ogni $x \in \Omega - V_s$, indichiamo con ρ la distanza di x da V_s :

$$\rho(x) = \min_{y \in V_s} |x - y|.$$

Posto

$$\tau = \frac{(s+2)(m-1)x - (s+1)}{1 - (m-1)x},$$

se risulta

$$(17) \quad x > \frac{1}{m-1} \frac{s+1}{s+2},$$

$$(18) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} u \rho^\tau = 0,$$

vale la proprietà P⁽³⁾.

Poniamo

$$v = \frac{2(m-1)x - 1}{1 - (m-1)x};$$

risulta $\tau = v - s$, e per la (17) si ha

$$(19) \quad \tau > 0,$$

(3) Nel caso $s = 0$, $V_0 \equiv N$ si riduce ad un solo punto x^0 , si ha $\rho = |x - x^0|$, e si riottengono i risultati di Pucci [5].

che implica $\nu > 0$. Inoltre, per ogni fissato $y \in V_s$, la funzione di x

$$g_2 = |x - y|^{-\nu}$$

è soluzione di $M_{\alpha, 0, 0}[g] = 0$ (cfr. la (7)) per $x \in \Omega - V_s$. Definiamo, per $x \in \Omega - V_s$ ed $s > 0$, la funzione

$$(20) \quad w(x) = \int_{V_s} |x - y|^{-\nu} d\sigma_y$$

Per dimostrare il teorema basta far vedere che le (17), (18) corrispondono alle (12), (13), cioè è sufficiente provare, tenendo conto anche della (19), che

$$(21) \quad w \geq k\rho^{-\tau},$$

con k costante positiva (*).

Indichiamo con E l'insieme dei punti $x \in \Omega - V_s$ per i quali $\rho(x) \leq \rho_0$, dove ρ_0 è la costante definita dall'ipotesi c). Per ogni fissato $x \in E$, sia $\bar{y}$ un punto di V_s avente minima distanza ρ da x . Osservato che la (20) può scriversi

$$w = \rho^{-\tau} \int_{V_s} \frac{\rho^\tau}{|x - y|^\nu} d\sigma_y,$$

tenendo conto di c) si ha, per $x \in E$:

$$\int_{V_s} \frac{\rho^\tau}{|x - y|^\nu} d\sigma_y \geq \int_{S_m(\bar{y}, \rho) \cap V_s} \frac{\rho^\tau}{|x - y|^\nu} d\sigma_y > \frac{1}{3} \frac{\omega_s}{s} \rho^s \frac{\rho^{\nu-s}}{(2\rho)^\nu} = \frac{1}{3 \cdot 2^\nu} \frac{\omega_s}{s} = k_1,$$

mentre per $x \in \Omega - V_s - E$, detto d il diametro di Ω , si ha:

$$\int_{V_s} \frac{\rho^\tau}{|x - y|^\nu} d\sigma_y > \frac{\rho_0^\tau}{d^\nu} \cdot \text{mis } V_s = k_2,$$

e pertanto la (21) sussiste per ogni $x \in \Omega - V_s$ con $k = \min(k_1, k_2)$.

In base poi alla condizione $\alpha \leq \frac{1}{m}$, si deduce che la (17) implica $s < m - 2$. Il teorema è così dimostrato.

(*) Per $s = 0$ la (21) sussiste con il segno di uguaglianza assumendo direttamente $w \equiv g_2$.

OSSERVAZIONE I. - Detto $\varepsilon > 0$ un numero reale arbitrario, si ha:

$$w = \rho^{-(\tau+\varepsilon)} \int_{V_s} \frac{\rho^{\tau+\varepsilon}}{|x-y|^{\tau+\varepsilon}} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^{s-\varepsilon}} < \\ < \rho^{-(\tau+\varepsilon)} \int_{V_s} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^{s-\varepsilon}} = K(x) \rho^{-(\tau+\varepsilon)},$$

con $K(x)$ funzione limitata, $0 < K(x) \leq K$, e quindi, tenendo conto della (21), la funzione $w(x)$ soddisfa alle seguenti limitazioni

$$k\rho^{-\tau} \leq w \leq K\rho^{-(\tau+\varepsilon)}.$$

OSSERVAZIONE II. - Mostriamo con un esempio che la (18) non può essere sostituita dall'ipotesi $u \in L^p$, con p dato dalla (1).

Per $s = 0$, se vale la (17) la funzione

$$u = |x - x^0|^{-\nu}$$

è soluzione di $F[u] = 0$, con $F = M_{x, 0, 0}$, la (18) non sussiste, e risulta $u \in L^p$. Tuttavia in qualsiasi intorno $0 < |x - x^0| < r_0$ non vale la proprietà P.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. CARLESON, *Selected problems on Exceptional Sets*. (Mimeographed), Uppsala (1961).
- [2] D. GILBARG, J. SERRIN, *On Isolated Singularities of Solutions of Second Order Elliptic Differential Equations*, Journ. d'Analyse Math., 4 (1956), pp. 309-340.
- [3] O. D. KELLOGG, *Foundations of Potential Theory*, Springer, Berlin (1929), p. 268.
- [4] W. LITTMAN, *Polar Sets and Removable Singularities of Partial Differential Equations*, Arkiv för Matematik (in corso di stampa).
- [5] C. PUCCI, *Operatori ellittici estremanti*, Ann. Mat. Pura Appl., 72 (1966), pp. 141-170.
- [6] J. SERRIN, *Removable Singularities of Solutions of Elliptic Equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., 17 (1964), pp. 67-78.
- [7] — —, *Singularities of Solutions of Nonlinear Equations*, Proc. Symp. Appl. Math., XVII, Amer. Math. Soc. (1965), pp. 68-88.
- [8] — —, *Local Behavior of Solutions of Quasi-Linear Equations*, Acta Math., 111 (1964), pp. 247-302.
- [9] J. SERRIN, H. WEINBERGER, *Isolated Singularities of Solutions of Linear Elliptic Equations*, Amer. Journ. Math., 88 (1966), pp. 258-272.