BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIERO BONERA

Dei sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente. Nota II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.4, p. 385–394.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_4_385_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

Dei sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente

PIERO BONERA (Bologna) (*)

NOTA II

Sunto. - *Proseguendo la ricerca iniziata nella Nota I, si espone una trattazione, che, in un caso particolare, conduce ad un interessante sistema di S_r, dal quale scaturisce un altro interessante sistema di S_{2r-3}, che ha come varietà base una certa varietà di Segre.*

11. - Riprendasi la considerazione del sistema (11) (num. 5) e suppongasi (se è possibile) che le ipersuperficie del sistema, che passano per il punto $\bar{x}$, considerato nel num. 3, cioè per un punto non situato nella varietà Φ, che è la varietà base del sistema, passino tutte per un altro punto $\bar{\bar{x}}$, pure non situato nella varietà Φ.

Allora le due condizioni (lineari omogenee) nelle μ_i:

$$\begin{aligned} \mu_i \bar{\varphi}^i &= 0, \\ \mu_i \bar{\bar{\varphi}}^i &= 0 \end{aligned} \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

avendo $\bar{\varphi}^i$, $\bar{\bar{\varphi}}^i$ significato ormai noto od ovvio, son identiche.

In conseguenza il punto $\bar{x}'$, dato dalle (8), è coniugato della retta $\bar{x}\bar{\bar{x}}$ rispetto al sistema (1') e quindi le ipersuperficie del sistema (11), che passano per $\bar{x}$, contengono tutte la retta $\bar{x}\bar{\bar{x}}$.

Ordunque il sistema (11) è composto con una congruenza lineare di spazi lineari e perciò è di grado zero.

12. - Qui e in seguito si supporrà, invece, che il sistema (11) sia *semplice.*

Allora *il sistema* (11) *sarà di dimensione* r ed inoltre esso, a norma del num. 11, sarà *omaloidico.*

Ciò posto, si ponga tra il sistema (11) e la totalità degli iperpiani di S_r:

$$\nu_i x^i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca N. 26 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

la proiettività di equazioni:

$$\mu_i = \nu_i .$$

Allora si riconosce che l'ipersuperficie del sistema (11), che corrisponde (nella proiettività introdotta) all'iperpiano generico di S_r, è *il luogo dei punti coniugati dell'iperpiano stesso rispetto alle singole quadriche del sistema* (1') (cfr. num. 4).

Infatti, assunti nel suddetto iperpiano r generici punti $x_{(t)}$ $(t = 1, 2, \dots, r)$ e considerati gli iperpiani polari dei singoli punti $x_{(t)}$ rispetto alla quadrica variabile nel sistema (1'), cioè gli iperpiani di equazioni:

$$\lambda^s \frac{\partial f_s}{\partial x^i} x^i_{(t)} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, r;\ s = 0, 1, \dots, r-1;\ t = 1, 2, \dots, r),$$

l'equazione del luogo sopra nominato sarà la risultante dell'eliminazione delle λ^s dalle equazioni precedenti, cioè:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x^i} x^i_{(1)} & \dots & \frac{\partial f_{r-1}}{\partial x^i} x^i_{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_0}{\partial x^i} x^i_{(r)} & \dots & \frac{\partial f_{r-1}}{\partial x^i} x^i_{(r)} \end{vmatrix} = 0,$$

il cui primo membro può scriversi:

$$\Sigma x^{i_1}_{(1)} \dots x^{i_r}_{(r)} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x^{i_1}} & \dots & \frac{\partial f_{r-1}}{\partial x^{i_1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_0}{\partial x^{i_r}} & \dots & \frac{\partial f_{r-1}}{\partial x^{i_r}} \end{vmatrix}, \tag{23}$$

essendo $(i_1, \dots, i_r)$ una qualunque disposizione con ripetizione (di classe r) dei numeri $0, 1, \dots, r$.

Siccome il determinante del termine generale della somma (23) è nullo identicamente, se due (almeno) degli indici $i_1, \dots, i_r$ son uguali, ed è uguale identicamente (a meno eventualmente del segno) ad una delle forme φ^i, se, invece, gli indici $i_1, \dots, i_r$ son tutti diversi, si conclude che la somma (23) è una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti delle forme φ^i e che i coefficienti stessi son uguali (o proporzionali) ai coefficienti omonimi delle variabili nell'equazione dell'iperpiano considerato, cioè ai minori (d'ordine r, presi alternativamente coi segni mutati) della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} x^0_{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & x^r_{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^0_{(r)} & \cdot & \cdot & \cdot & x^r_{(r)} \end{matrix} \right\|$$

formata con le coordinate dei punti $x_{(t)}$.

13. - Il sistema (11), privato, a norma delle (12), della componente fissa $\Phi^0 = 0$, diviene:

$$(11') \qquad \mu_i \Psi^i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

le Ψ^i essendo forme d'ugual grado [non maggiore di $r - 2$ (num. 5, oss.)], prime tra loro.

Ciò premesso, se, in particolare, le forme Ψ^i, come si supporrà, son *lineari*, il sistema (11'), essendo ∞^r (num. 12), è privo di punti base e perciò la varietà Φ riducesi all'ipersuperficie (d'ordine $r - 1$) (13).

Allora, posto:

$$\Psi^i = b^{ik} x_k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, r),$$

la proiettività introdotta tra il sistema (11), ossia tra il sistema (11') e la totalità degli iperpiani di S_r (num. 12) genera in S_r una omografia, Ω, la quale è rappresentata dalle equazioni:

$$(24) \qquad \rho x'^i = b^{ik} x_k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, r).$$

Ebbene, si proverà che l'omografia Ω muta in sè l'insieme, $\overline{S}_r$, dei punti di S_r, che non giacciono nell'ipersuperficie (13).

Invero, si supponga che esista in $\overline{S}_r$ un punto $\overline{x}$, il cui corrispondente punto $\overline{x}'$, dato dalle (24), ossia [essendo $\overline{\Phi}^0 \neq 0$ e ricordando le (12)] dalle (8), giaccia, invece, nell'ipersuperficie (13).

Allora il punto $\overline{x}$ è distinto dal punto $\overline{x}'$ e quindi esso, non giacendo nell'ipersuperficie (13), non può esser base del sistema (1'); nè può esserlo il punto $\overline{x}'$, altrimenti gli iperpiani del sistema (11'), che passano per $\overline{x}$, conterrebbero tutti la retta $\overline{x}\,\overline{x}'$.

Pertanto lo spazio polare, S_d ($d \geq 1$), di $\overline{x}'$ rispetto al sistema (1') non contiene $\overline{x}'$ e il generico punto x della retta di S_d, che esce genericamente da $\overline{x}$, non giace nell'ipersuperficie (13) e neppure nella varietà base del sistema (1').

Segue (num^{i}. 8, 9) che le quadriche del sistema (1'), che passano per x, contengono tutte la retta $x\bar{x}'$ e quindi il piano dei tre punti (non allineati) $\bar{x}$, $\bar{x}'$. x (quest'ultimo essendo generico sulla retta considerata).

Pertanto lo spazio polare di $\bar{x}$ rispetto al sistema (1') è un $S_{d'}$ ($d' \geq 1$), anzichè un punto, precisamente il punto $\bar{x}'$.

L'asserto è dunque provato.

Dal risultato prec. deducesi che la corrispondenza cremoniana, Γ, definita in S_r dalle equazioni:

$$\text{(S')} \qquad \rho x'^i = \varphi^i(x_0, \ldots, x_r) \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

ossia generata in S_r dalla polarità rispetto al sistema (1'), coincide, nell'insieme $\bar{S}_r$, con la corrispondenza ivi definita [essendo $\bar{\Phi}^0 \neq 0$ e ricordando le (12)] dalle equazioni:

$$\rho \bar{x}'^i = \bar{\Psi}^i,$$

ossia che la corrispondenza Γ coincide, in $\bar{S}_r$, con l'omografia Ω.

14. – Si osservi subito che l'omografia Ω è *involutoria* e perciò dotata di *due spazi fondamentali sghembi* S_{k-1}, S_{r-k}.

Orbene, si proverà anzitutto che *l'* S_{k-1} *e l'* S_{r-k} *son spazi base del sistema* (1).

Infatti, se si considera il determinante (nullo identicamente) Δ_l e in questo alle x^i si sostituiscono le omonime $\bar{x}^i$, coordinate d'un punto qualsiasi di $\bar{S}_r$, si dedurranno (essendo $\bar{\Phi}^0 \neq 0$) le identità (rispetto alle $\bar{x}^i$):

$$\frac{\partial f_q}{\partial \bar{x}^i} \bar{\Psi}^i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, r;\ q = 0, 1, \ldots, r-1, l),$$

e da queste le identità (rispetto alle x^i, coordinate d'un punto qualsiasi di S_r):

$$\frac{\partial f_q}{\partial x^i} \Psi^i = 0.$$

Siccome, d'altra parte, in un punto qualsiasi dell'S_{k-1} o dell'S_{r-k} coesistono, a norma delle (24) e per un opportuno valore ρ' di ρ, le:

$$\rho' x^i = b^{ik} x_k,$$

dalle identità sopra scritte si dedurrà che nel punto predetto coesistono le:

$$f_q = 0.$$

L'asserto è dunque provato.

Si proverà inoltre che *gli spazi* S_{k-1} *e* S_{r-k} *giacciono nell'ipersuperficie* (13).

Se, infatti, si osserva che devono coesistere le limitazioni ([5]):

$$1 < k < r, \tag{25}$$

agevolmente si riconosce che un punto qualsiasi dell'S_{k-1} (essendo $k-1 \geq 1$) o dell'S_{r-k} (essendo $r-k \geq 1$) è doppio per qualche quadrica del sistema (1').

Infine si osservi che *un punto base del sistema* (1), *se non giace in alcuno degli spazi* S_{k-1} *e* S_{r-k}, *giace pure nell'ipersuperficie* (13).

Invero, il punto suddetto, essendo base del sistema (1), è unito in Γ e quindi (num. 13) esso, se non giacesse nella (13), sarebbe pure unito in Ω, cioè giacerebbe nell'S_{k-1} o nell'S_{r-k}, contro l'ipotesi.

15. - Se si assumono come spazi S_{r-k}, S_{k-1} risp. i seguenti:

$$x_0 = x_1 = \dots = x_{k-1} = 0, \qquad x_k = x_{k+1} = \dots = x_r = 0,$$

il sistema lineare, Σ_k, delle quadriche di S_r, che li contengono, ha l'equazione:

$$\lambda^{uv} x_u x_v = 0 \qquad (u = 0, 1, \dots, k-1;\ v = k, k+1, \dots, r) \tag{26}$$

e perciò la dimensione:

$$h = k(r-k+1) - 1. \tag{27}$$

Si può rapidamente verificare che il sistema Σ_k è a matrice indeterminata e di caratteristica r.

Allo scopo, dapprima si osservi che le quadriche di Σ_k, che hanno punto doppio in un dato punto, P, non situato in alcuno degli spazi S_{k-1} e S_{r-k}, son tutte e sole le quadriche di S_r, che contengono gli spazi S_k e S_{r-k+1}, che da P proiettano risp. l'S_{k-1} e l'S_{r-k}, indi si osservi che, essendo questi ultimi sghembi, l'S_k e l'S_{r-k+1} si segano in una retta.

([5]) Se, infatti, fosse $k = 1$ o $k = r$, il sistema (1) avrebbe la dimensione minore di r, contro l'ipotesi (num. 1).

Allora la dimensione del sistema (lineare) delle quadriche di Σ_k, che hanno punto doppio in P, è fornita dall'espressione:

$$\frac{r(r+3)}{2} - \frac{k(k+3)}{2} - \frac{(r-k+1)(r-k+4)}{2} + 1,$$

ossia, per la (27), è:

$$h - r.$$

Di qui discende subito l'asserto.

Se, fissato $r \geq 3$, si considerano due valori (distinti o no) k_1, k_2 di k. soddisfacenti la:

$$k_1 + k_2 = r + 1,$$

si accerta agevolmente che i sistemi Σ_{k_1}, Σ_{k_2} son proiettivamente identici e che i sistemi Σ_k, proiettivamente distinti, che rispondono ai valori (25) di k. son tutti e soli quelli, che rispondono ai valori seguenti di k:

$$(25_1) \qquad 2 \leq k \leq \frac{r}{2},$$

se r è pari, e ai seguenti:

$$(25_2) \qquad 2 \leq k \leq \frac{r+1}{2},$$

se r è dispari.

16. - Se il sistema (1'), contrariamente all'ipotesi del num. 3, possiede almeno un punto base doppio, questo è unico (altrimenti la varietà Φ sarebbe indeterminata) ed altresì doppio per tutte le quadriche del sistema (1); inversamente, se il sistema (1) possiede almeno un punto base doppio, questo è altresì doppio per tutte le quadriche del sistema (1') e perciò (secondo precede) è unico.

Premesso ciò e tenuto presente il num. 15. si conclude:

Nelle ipotesi dei num^i. 1, 2 *e* 12 *il sistema* (1) *o possiede un unico punto base doppio o, se le forme* $\Psi^i (i = 0, 1, ..., r)$ *son lineari, è uno dei sistemi* Σ_k *rispondenti ai valori* (25_1) *di* k, *se* r *è pari. e ai valori* (25_2), *se* r *è dispari, o infine è uno dei sistemi subordinati dei precedenti sistemi* Σ_k.

OSSERVAZIONE. - I suddetti sistemi Σ_k, escluso, se r è dispari, il sistema $\Sigma_{\frac{r+1}{2}}$, constano ciascuno di quadriche tutte specializzate (la quadrica generica essendo specializzata $r - 2k + 1$ volte).

17. - Se, come suggeriscono le equazioni (26) di Σ_k, si pone:

$$\sigma y_{uv} = x_u x_v \qquad (u = 0, 1, \ldots, k-1;\ v = k, k+1, \ldots, r), \tag{28}$$

essendo σ un arbitrario fattore di proporzionalità, e s'interpretano le y_{uv} come coordinate proiettive omogenee di punto in uno spazio S_h, la dimensione h di questo essendo data dalla (27), allora le (28) rappresentano in S_h *la varietà di* SEGRE, $V_{(k)}$, *delle coppie di punti degli spazi base* S_{k-1} *e* S_{r-k} *di* Σ_k.

L'eliminazione delle variabili (indipendenti) x_u, x_v dalle (28) conduce a scrivere le:

$$y_{uv}y_{u'v'} - y_{u'v}y_{uv'} = 0 \quad (u \neq u' = 0, 1, \ldots, k-1;\ v \neq v' = k, k+1, \ldots, r), \tag{29}$$

ossia ad annullare tutti i minori del secondo ordine della matrice:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} y_{0k} & y_{0,k+1} & \cdot & \cdot & y_{0r} \\ y_{1k} & y_{1,k+1} & \cdot & \cdot & y_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{k-1,k} & y_{k-1,k+1} & \cdot & \cdot & y_{k-1,r} \end{array} \right\| . \tag{30}$$

Le quadriche (29), indipendenti linearmente e in numero di

$$N = \binom{k}{2}\binom{r-k+1}{2},$$

individuano un sistema lineare ∞^{N-1}, $\Sigma_{(k)}$, di cui $V_{(k)}$ è la varietà base.

Il sistema $\Sigma_{(k)}$ *è completo* (rispetto a $V_{(k)}$).

Invero, se una quadrica di S_h, data dall'equazione:

$$a^{uv\bar{u}\bar{v}} y_{uv} y_{\bar{u}\bar{v}} = 0 \quad (u, \bar{u} = 0, 1, \ldots, k-1;\ v, \bar{v} = k, k+1, \ldots, r;\ a^{uv\bar{u}\bar{v}} = a^{\bar{u}\bar{v}uv}), \tag{31}$$

contiene $V_{(k)}$, le (28), sostituite nella (31), la soddisfanno identicamente e pertanto devono aver luogo le:

$$a^{uvuv} = 0, \quad a^{uvu'v'} = -\, a^{uv'u'v}.$$

Allora la (31) diviene:

$$a^{uvu'v'}(y_{uv}y_{u'v'} - y_{uv'}y_{u'v}) = 0,$$

e perciò la quadrica considerata giace appunto in $\Sigma_{(k)}$.

18. – Le argomentazioni del num. 17 trovano un'interessante applicazione nel caso particolare:

$$k = 2,$$

nel quale la matrice (30) diviene:

$$(30') \qquad \left\| \begin{matrix} y_{02} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_{0r} \\ y_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_{1r} \end{matrix} \right\|.$$

Ciò posto, si consideri il sistema linease ∞^{r-3}, Σ, di quadriche

$$(32) \qquad \lambda^t(y_{02}y_{1t} - y_{12}y_{0t}) = 0 \qquad (t = 3, 4, \ldots, r),$$

subordinato del sistema $\Sigma_{(2)}$, indi si osservi che un punto dell'S_h, cioè dell'S_{2r-3} ambiente, che sia base del sistema Σ, cioè che annulli i seguenti minori della matrice (30')·

$$\left| \begin{matrix} y_{02} & y_{0t} \\ y_{12} & y_{1t} \end{matrix} \right|,$$

ma che non giaccia nell'S_{2r-5}. β, di equazioni:

$$y_{02} = y_{12} = 0,$$

annullerà pure tutti i rimanenti minori della matrice (30') e perciò (num. 17) sarà base di $\Sigma_{(2)}$, ossia giacerà nella varietà di Segre $V_{(2)}$.

Dunque, *la varietà base di Σ si distribuisce nello spazio β e nella varietà $V_{(2)}$*.

Ora si assuma in S_h un punto, P, che non sia base di Σ, indi si consideri il sistema lineare ∞^{r-4}, Σ_P, che P stacca da Σ.

Siccome la matrice jacobiana di Σ, come accertasi direttamente, non s'annulla nel punto P, questo non è doppio per alcuna quadrica di Σ e quindi lo spazio (lineare) tangente nel punto P a tutte le quadriche di Σ_P è un S_r, τ.

Ebbene, si riscontra ([6]) che, se P, come ora si supporrà, è del

([6]) Basta, infatti, accertare l'asserto in una opportuna scelta del punto P. Scelto, allo scopo, il seguente punto:

$$P \equiv (y_{02} = y_{12} = y_{03} = 1,\ y_{04} = \ldots = y_{0r} = y_{13} = \ldots = y_{1r} = 0),$$

il sistema Σ_P, per la (32), ha l'equazione:

$$\lambda^{t'}(y_{02}y_{1t'} - y_{12}y_{0t'}) = 0 \qquad (t' = 4, 5, \ldots, r),$$

cosicchè lo spazio τ ha le equazioni:

$$y_{0t'} = y_{1t'}.$$

Dopo di ciò l'asserto si accerta subito algebricamente.

resto generico in S_h, lo spazio τ non giace in alcuna quadrica di Σ_P.

Segue che il sistema (lineare), Σ'_P, che Σ_P segna sopra τ, è pure ∞^{r-4} e che gli spazi β e τ si segano in un S_{r-2}, β' (cioè che essi son indipendenti in S_h, altrimenti, essendo β comune a tutte le quadriche del sistema Σ_P e P doppio per tutte le quadriche del sistema Σ'_P, lo spazio τ sarebbe base del sistema Σ_P, contro il rilievo sopra occorso).

Pertanto Σ'_P è composto con l'S_{r-1} fisso, che proietta β' da P, e con una stella ∞^{r-4} di S_{r-1}, che passano tutti per P.

Dunque l'S_3 base della stella precedente contiene P, ma esso, come può accertarsi (7), non giace nell'S_{r-1} sopra nominato.

Ora si assuma entro Σ una quadrica, Q, che non contenga P.

Ebbene, la quadrica Q, contenendo β', taglierà ulteriormente l'S_{r-1} in un S_{r-2}, β^*, che, come può accertarsi (8), differisce da β', e taglierà l'S_3 in una quadrica, Q^*, che non giace in β' (altrimenti l'S_3 giacerebbe nell'S_{r-1}).

Si conclude, per il primo risultato del num. presente, che l'intersezione dello spazio τ e della varietà $V_{(2)}$ si distribuisce nello spazio β^* e nella quadrica Q^*.

19. - Dalla conclusione del n. 18 deducesi:

Tutte le rette, che passano per P e che giacciono nell'S_3, son corde della varietà di Segre $V_{(2)}$ e, inversamente, una corda di questa, che esca da P, giace nell'S_3.

Allora, se si riprende la considerazione del sistema $\Sigma_{(2)}$ (num. 17), la cui dimensione è:

$$\frac{1}{2}r(r-3),$$

segue che le quadriche di $\Sigma_{(2)}$, che contengono P, contengono tutte l'S_3.

(7) Nella prec. scelta del punto P gli spazi S_{r-1} e S_3 hanno, infatti, le equazioni:

$$y_{02}=y_{12},\ y_{04}=y_{14},\ \dots,\ y_{0r}=y_{1r}$$

e risp.:

$$y_{04}=\dots=y_{0r}=y_{14}=\dots=y_{1r}=0.$$

(8) Nella prec. scelta del punto P l'asserto si accerta, infatti, assumendo come quadrica Q la seguente:

$$y_{02}y_{13}-y_{12}y_{03}=0.$$

Si osservi, peraltro, che l' S_3, come potrebbe dimostrarsi, è lo spazio polare di P, rispetto al sistema (lineare), che P stacca da $\Sigma_{(2)}$.

Segue che la matrice jacobiana di $\Sigma_{(2)}$ ha in P la caratteristica:

$$2r - 5.$$

Concludendo (num. 16, 17):

La varietà di Segre $V_{(2)}$, *cioè la varietà delle coppie di punti dell'* S_1 *base e dell'* S_{r-2} *base del sistema* Σ_2 *(di* S_r*), è la varietà base d'un sistema lineare completo* $\infty^{\frac{1}{2}r(r-3)}$ *di quadriche (di* S_{2r-3}*), composto con una congruenza lineare di* S_3 *e a matrice jacobiana nulla identicamente e di caratteristica* $2r - 5$.

Pervenuta alla Segreteria dell'U. M I.
il 15 maggio 1966