
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni.

- * Oeuvres de Camille Jordan, Gauthier-Villars, Paris, 1964 (G. Sansone)
- * A. Kaufmann, R. Douriaux, Les fonctions de la variable complexe - Théorie et application au niveau de l'ingénieur, Eyrolles Gauthier-Villars, Paris, 1962 (Giulio Supino)
- * A. Surin, Etude du Schéma "Fluid Parfait" et des Equations de mouvement dans les théories pentadimensionnelles de Jordan-Thiry e de Kaluza-Klein, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. 159, Paris, 1965 (Giulio Supino)
- * Deuxième Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle, Liège, 4-6 mai 1964, Gauthier-Villars, Paris, 1964 (Maria Cinquini Cibrario)
- * J. L. Lagrange, Mécanique Analytique, tomo I e II, Albert Blanchard, Paris, 1965 (Dario Graffi)
- * W. S. Loud, Periodic Solutions of Perturbed Second-Order Autonomous Equations, Memoirs of the American Mathematical Society, n.47 (Dario Graffi)
- * Advances in Game Theory, Princeton University Press, Princeton, 1964 (Bruno de Finetti)
- * Richard L. Palais, Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Princeton University Press, 1965 (Edoardo Vesentini)
- * F. Oort, Commutative groups schemes, Springer-Verlag, Berlin, 1966 (Iacopo Barsotti)
- * Atti del Convegno Lagrangiano, Torino 22-25 ottobre 1963, Accademia delle Scienze, Torino, 1964 (Silvio Cinquini)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 21
(1966), n.3, p. 315-329.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_3_315_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

Oeuvres de Camille Jordan publiées sous la direction de M. Gaston Julia par M. René Garnier et M. Jean Dieudonné: T. IV, XXXIII+610 pp., 1964 (120 N.F.), (Paris, Gauthier-Villars).

Alla pubblicazione dei primi tre Tomi di memorie di C. Jordan, editi da G. Julia e J. Dieudonné, già recensiti nel vol. XIX del « Bollettino », ha fatto seguito nel 1964 il T. IV, alla cui edizione hanno collaborato R. Garnier e J. Dieudonné.

In questo Tomo sono raccolti ventisette lavori apparsi in riviste francesi e straniere, pertinenti la topologia dei poliedri, le serie di Fourier, le equazioni differenziali lineari, il calcolo delle probabilità, la meccanica.

I tre volumi del « Cours d'analyse », il celebre trattato « Théorie des substitutions et des équations algébriques » e le memorie pubblicate nei quattro tomi comprendono così tutta la produzione matematica del Nostro, e bisognerà pur esser grati agli Editori di aver inserito nel T. IV diverse pubblicazioni dello stesso Jordan e di altri eminenti matematici che nel medesimo tempo fanno conoscere lo scienziato e l'uomo.

Nella prefazione all'ampio rapporto che C. Jordan presentò all'Académie des Sciences nel 1881 in appoggio alla sua candidatura (pp. 563-581) così Egli caratterizzò il suo spirito matematico « approfondir la théorie de l'ordre au double point de vue de la Géométrie et de l'Analyse ». Nell'allocuzione che durante la prima guerra mondiale il 18 XII 1916. Egli pronunciò alla seduta pubblica dell'Académie des Sciences egli così si espresse sulla guerra — che nel corso di cinque anni gli falciò tre figli e un nipote — « sur les champs de la bataille la mort exerce son empire » (p. 582).

G. Julia, nella sua breve prefazione al T. IV, dice di C. Jordan che « ... apparaisse comme une des plus nobles âmes qu'il nous ait été donné de rencontrer » (p. VI). Passando al matematico, E. Picard nella seduta dell'Académie des Sciences del 22 gennaio 1922, così sintetizza l'opera matematica del Nostro « Jordan a été vraiment un grand algébriste; les notions fondamentales qu'il a introduites en Analyse préserveront son nom de l'oubli ».

L'analisi approfondita della vita di C. Jordan trovasi nell'elogio accademico in onore del Nostro che H. Lebesgue lesse il 4 giugno 1923 all'Académie des Sciences (XXXIII). Sullo scienziato Lebesgue dice: « Camille Jordan doit être considéré comme le premier artisan de cette renaissance de l'étude du réel qui vient de donner à notre science une vigueur nouvelle » (p. XXIII); « ses recherches sur les notions de courbe, de domaine, sont courtes et simples; elles frappaient si juste qu'elles constituent aujourd'hui les premiers paragraphes du chapitre le plus riche, le plus nourri et le mieux coordonné de la Science nouvelle (Analysis situs) » (p. XXIV). Dell'uomo, Lebesgue rievoca l'estrema delicatezza, l'infinita bontà, la vita ammirevole dedicata alla famiglia e alla scienza.

Concludendo, il recensore si congratula con G. Julia, J. Dieudonné, e R. Garnier che hanno curato un'edizione completa delle memorie di C. Jordan (1838-1922), che si è collocata degnamente tra le edizioni dei grandi matematici, pubblicate nell'ultimo cinquantennio.

G. SANSONE

A. KAUFMANN e R. DOURIAUX, *Les fonctions de la variable complexe Théorie et application au niveau de l'ingénieur*. Un volume p. VIII+425, 355 fig. Parigi (Eyrolles e Gauthier Villars), 1962.

Ci sarebbe molto da discutere per sapere come debba essere concepito un libro di matematica superiore dedicato agli ingegneri. In genere si ritiene che esso debba essere tenuto su un tono più elementare, dando meno importanza alle dimostrazioni e più importanza alle applicazioni. Ma fino a che punto si può procedere per questa via? Fino a che punto cioè, trascurando le dimostrazioni o svolgendole in modo meno rigoroso si può procedere senza rendere il libro incomprensibile dal punto di vista deduttivo e senza obbligare il lettore ad atti di fede? Il problema è abbastanza complicato. Il mio punto di vista personale è che le dimostrazioni siano *tutte* necessarie, e che debbano essere tutte rigorose; la semplificazione che ritengo si possa ammettere è soltanto quella di dimostrare l'asserto sotto condizioni un poco più restrittive di quelle per le quali si è riusciti a stabilirlo e giustifico questa mia affermazione col fatto che nelle applicazioni si ha a che fare il più delle volte con funzioni continue e derivabili... e quando non è così... non sono sufficienti le modeste generalizzazioni che i matematici riescono a darci. Questo almeno per la mia esperienza.

Un'altra osservazione farei su le dimostrazioni e cioè che sono più utili le dimostrazioni « costruttive » (quelle cioè con le quali si potrebbe costruire effettivamente il risultato) piuttosto che quelle astratte; quelle che ricorrono a nozioni di simmetria e ad altre nozioni similmente intuitive piuttosto che quelle che richiedono sviluppi di matematiche superiori. Perchè si deve tener presente che l'ingegneria richiede sempre più matematica, ma è ancora fondamentalmente basata sull'intuizione: è un'« arte » e non una « scienza ».

Il libro redatto dagli Ingegneri Kaufmann e Douriaux si ispira al criterio di mantenere la trattazione elementare e di trascurare qualche dimostrazione; parte da richiami su nozioni note in ogni testo di Algebra, e presenta il maggior numero di applicazioni (specialmente nel campo elettrico) limitando la trattazione teorica. Esso è diviso in undici capitoli.

Di questi il primo richiama le nozioni sui numeri complessi e sulla loro rappresentazione nel piano; e già in questo primo capitolo si indicano alcune applicazioni tecniche (ai fenomeni periodici specialmente elettrici) e si indicano alcuni esercizi.

Il secondo capitolo studia le funzioni di variabile complessa (in generale), dà le regole di monogenità e definisce le funzioni olomorfe e le funzioni meromorfe. Studia infine gli sviluppi in serie. Anche questo capitolo è seguito da numerosi esercizi.

Il terzo e il quarto capitolo si occupano delle trasformazioni nel piano complesso; sono presentati numerosi esempi, indicate alcune applicazioni tecniche ed infine è data la teoria generale della rappresentazione conforme.

Il sesto capitolo considera l'integrazione nel piano complesso; il settimo gli sviluppi in serie (di Taylor e di Laurent) ed il calcolo dei residui; il capitolo ottavo indica l'utilizzazione della formula dei residui per il calcolo di alcuni integrali; sono qui indicate le funzioni Beta e Gamma di Eulero.

Il capitolo nono sotto il titolo: applicazioni diverse, dà alcuni sviluppi ulteriori; la trasformazione di Schwarz Christoffel, il prolungamento analitico, i polinomi di Hurwitz e studia le funzioni analitiche con parte reale positiva.

Il capitolo decimo dà le nozioni fondamentali della trasformazione di Laplace e il capitolo undicesimo dà le applicazioni della teoria alle reti elettriche.

Il libro è scritto con la consueta chiarezza dei libri francesi e si legge volentieri. Se mi è lecito fare qualche osservazione trovo che sarebbe stato utile soffermarsi su un maggiore numero di funzioni speciali; in particolare sulle funzioni di Bessel, sui polinomi di Legendre e sulla serie ipergeometrica oltre che sulle equazioni differenziali del secondo ordine continuamente usate nella tecnica. Ma forse questo avrebbe eccessivamente accresciuto la mole del libro.

Un'ultima osservazione: quando gli AA. nominano un matematico celebre, in nota sono indicate la nazionalità e le date di nascita e di morte: per es. Eulero: matematico svizzero (1707 1783). Mancano le date di nascita e di morte di Cauchy e Weierstrass non è nominato: il che in un libro su le funzioni analitiche è piuttosto strano!

GIULIO SUPINO

A. SURIN, *Etude du Schéma « Fluid Parfait » et des Equations de mouvement dans les théories pentadimensionnelles de Jordan Thiry et de Kaluza Klein*. Mémorial des Sciences Mathématiques. Fasc. 159, Paris 1965.

Una teoria unitaria del campo gravitazionale e del campo elettromagnetico può essere inquadrata in una varietà a connessione affine a quattro dimensioni o in una varietà a cinque dimensioni: quest'ultimo punto di vista è stato sviluppato dalle teorie di Kaluza Klein (1921 e 1926) e di Jordan Thiry (1947 1950).

L'Autrice definisce, seguendo quest'ultima teoria lo schema di fluido perfetto, studia il problema di Cauchy per il campo interno e ottiene l'espressione della celerità per le onde idrodinamiche (che risulta eguale a quella che si ottiene in idrodinamica classica applicando il metodo di Hugoniot — cioè la teoria delle caratteristiche). Successivamente l'A. ricerca le equazioni del moto ottenendo per due vie diverse gli stessi risultati, peraltro in contraddizione con l'elettromagnetismo classico. Questo risultato inaccettabile sembrerebbe richiedere la modificazione delle equazioni del campo.

Dopo questo risultato negativo relativo alla teoria di Jordan Thiry l'A. ha effettuato analoghe ricerche su la teoria di Kaluza Klein e queste non hanno portato a contraddizioni.

GIULIO SUPINO

Deuxième Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle, Liège, 4 6 mai 1964, Centre Belge de Recherches Mathématiques. Librairie Universitaire, Louvain Librairie Gauthier - Villars, Paris, 1964, pp. 1 166.

Il volume, che si apre con i discorsi inaugurali del presidente del C.B.R.M. e del prof. H. Garnir, segretario del convegno, contiene il testo delle conferenze e delle comunicazioni svolte dai partecipanti al convegno di Analisi Fun-

zionale, tenuto a Liegi nel maggio 1964; a tale argomento il C.B.R.M. aveva già dedicato un primo convegno, tenuto a Lovanio nel 1960. Riportiamo i titoli delle varie conferenze e comunicazioni, limitandoci ad un brevissimo cenno degli argomenti trattati.

L. Amerio, *Solutions presque périodiques d'équations fonctionnelles dans les espaces de Hilbert*.

L'A. dà una ampia e dettagliata esposizione dell'argomento; scopo principale della trattazione è mostrare come i risultati di J. Favard sulle soluzioni quasi periodiche dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti quasi periodici e funzioni date quasi periodiche possano essere generalizzate alle equazioni astratte. È dimostrato un teorema di minimo; sono dati un teorema di quasi periodicità debole e un teorema di quasi periodicità forte (in un certo spazio hilbertiano W_0). A. Martineau, *Equations différentielles d'ordre infini*.

L'A. si propone il problema di estendere alle equazioni differenziali di ordine infinito i teoremi noti per le equazioni differenziali a coefficienti costanti usuali, che si possono interpretare come analisi e sintesi spettrale dell'operatore $\frac{d}{dx}$ sullo spazio delle soluzioni.

Il metodo seguito è stato creato e impiegato essenzialmente da L. Schwartz, B. Malgrange e anche E. Ehrenpreis.

K. Maurin, *General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups*.

Breve esposizione di risultati dovuti all'A. (alcuni in collaborazione con L. Maurin), concernenti teoremi nucleari spettrali e loro varie applicazioni.

A. P. Robertson, *Hypercomplete spaces*.

Brevissima esposizione di risultati dovuti all'A. (alcuni in collaborazione con W. Robertson) sull'argomento del titolo.

H. H. Schaefer, *On the role of order structures in spectral theory*, (della comunicazione è stampato solo un sunto di poche righe).

C. Foias, *Modèles fonctionnelles, liaison entre les théories de la prédiction, de la fonction caractéristique et de la dilatation unitaire*.

L'A. espone dettagliatamente svariati risultati ottenuti in collaborazione da lui stesso e da B. Sz Nagy; sono studiate a fondo le contrazioni in uno spazio di Hilbert; è definita la funzione caratteristica di una contrazione; sono studiate certe fattorizzazioni di funzioni matriciali e le applicazioni relative; i risultati sono applicati alla teoria della dispersione nella sua forma astratta. La trattazione è completata da una bibliografia molto ampia.

A. Pietsch, *Dualnukleare lokalconvexe Räume*.

Nella breve comunicazione l'A. dimostra una condizione necessaria e sufficiente perchè lo spazio duale topologico forte di uno spazio nucleare localmente convesso sia anch'esso nucleare.

E. Magenes, *Problèmes de traces et problèmes aux limites pour équations linéaires elliptiques et paraboliques*.

L'A., in una diffusa esposizione, mette in luce numerosi risultati ottenuti recentemente in collaborazione da lui stesso e da J. L. Lions sui problemi ai limiti per operatori lineari a derivate parziali. L'A. introduce l'argomento, osservando che, p. es. per il problema di Dirichlet classico

$$(1) \quad \Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u/\Gamma = \varphi$$

(Ω insieme aperto limitato di R^n , Γ sua frontiera), si pongono le questioni: determinare lo spazio più generale, in cui si può prendere la funzione φ , in modo che $u/\Gamma = \varphi$ abbia un significato preciso e il problema (1) sia risolubile; stabilire se una funzione armonica *qualunque* in Ω ha una « traccia su Γ »; questioni dello stesso tipo sussistono per il problema classico dell'equazione del calore. Tali questioni possono essere inquadrare in una teoria del tutto generale, che si può applicare a classi molto estese di problemi ai limiti

per operatori ellittici e parabolici di ordine qualunque e anche per altri operatori. Nella conferenza è sviluppata la teoria nel caso del problema di Dirichlet relativo ad un operatore ellittico di ordine m (in R^n), e ad un problema misto del tipo di Dirichlet (che generalizza il problema classico per l'equazione del calore) per un operatore parabolico (in R^{n+1}). La trattazione si conclude con un'ampia bibliografia.

L. Waelbroeck, *Les semi groupes différentiables*.

Nella breve comunicazione l'A. studia i semigruppì di operatori su uno spazio localmente convesso, che verificano una condizione naturale di differenziabilità; tali semigruppì sono indefinitamente differenziabili. È studiato il loro generatore infinitesimale, del quale è considerata la risolvente asintotica. J. Leray, Y. Ohya, *Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts*.

Nella conferenza, molto ampia e dettagliata, gli A., dopo aver brevemente richiamate le ricerche relative alle equazioni lineari (a derivate parziali) strettamente iperboliche, risolvono il problema di Cauchy successivamente per equazioni lineari decomponibili in equazioni strettamente iperboliche, per sistemi lineari (di equazioni a derivate parziali), la cui parte principale è diagonale, per sistemi lineari iperbolicì qualsiasi. Nella dimostrazione è fatto uso di un metodo di approssimazioni successive, ottenuto risolvendo dei problemi di Cauchy strettamente iperbolicì; sono introdotte norme formali e serie formali; il problema è risolto in opportune classi di Gevrey. È data un'ampia bibliografia.

J. Leray, L. Waelbroeck, *Norme formelle d'une fonction composée (préliminaire à l'étude des systèmes non linéaires, hyperboliques non stricts)*.

Il metodo esposto nella conferenza precedente per lo studio di sistemi (di equazioni a derivate parziali) lineari non strettamente iperbolicì può essere esteso allo studio di sistemi non lineari, pure non strettamente iperbolicì, grazie a un teorema di composizione delle funzioni; alla questione è dedicata la comunicazione, nella quale sono studiate a fondo le norme formali e le serie formali.

L. Schwartz, *Sous espaces hilbertiennes et noyaux associés; applications aux représentations des groupes de Lie*.

Nella prima parte della conferenza, l'A., dopo aver definito i sottospazi hilbertiani di uno spazio vettoriale topologico, studia minutamente le proprietà di struttura di tali sottospazi, e definisce il nucleo associato ad uno di essi. Nella seconda e terza parte l'A. espone numerosi teoremi relativi alla rappresentazione dei gruppi di Lie.

MARIA CINQUINI CIBRARIO

J. L. LAGRANGE, *Mécanique Analytique*, tomo I e II, Albert Blanchard, Paris 1965.

Pietro Burgatti in un « Discorso sullo sviluppo storico della meccanica » inserito nel Suo trattato di Meccanica Razionale (Zanichelli, Bologna 1918) dopo avere esposto la storia dei principi essenziali della meccanica (classica) fino a quello di D'Alembert scrive: « Dopo D'Alembert occorre dunque fare il cammino inverso; occorre dai frutti della sintesi derivare con metodi generali e sicuri tutte le leggi dell'equilibrio e di moto note e ignote di qualsiasi corpo o gruppo di corpi sollecitati da forze qualunque; ed occorre eziandio ridurre la meccanica a dottrina che non fosse solamente il cibo sostanziale di pochi eletti ingegni, ma il pane di tutti gli studiosi, onde nutrire il loro intelletto, e, abilitandolo alle varie speculazioni scientifiche e pratiche, cooperare in tal guisa all'incremento e alla diffusione della civiltà. Questa era l'opera da compiere; e questa, già iniziata da Eulero, compì il sommo Lagrange con la sua opera *Mécanique Analytique*. Opera invero stupenda,

che prodigò la cultura fisica fondamentale a tutte le generazioni del secolo XIX e che vive tuttora quasi intatta ... Opera che vivrà anche quando, penetrato l'umano ingegno nei più repositi fenomeni della materia, la meccanica di oggi apparirà solo una prima approssimata immagine del vero ».

A queste parole del mio Maestro, scritte cinquanta anni fa, vi è solo da aggiungere che ormai ben conosciamo i limiti di validità della meccanica di Lagrange, e che però la « *Mécanique analytique* » è sempre viva, vitale, feconda di progresso scientifico e, come alcune celebri opere letterarie, può leggersi ancora con diletto e profitto.

Come è noto, la prima edizione della « *Mécanique Analytique* », porta la data del 1788, la seconda, molto più ampia della prima, fu pubblicata poco tempo dopo la morte di Lagrange (1813). Altre due edizioni si ebbero nel secolo scorso: la terza del 1853 a cura di J. Bertrand, la quarta del 1888 a cura di G. Darboux. Queste edizioni riproducono, in sostanza, la seconda, ma contengono anche, a piè pagina, acute ed interessanti note di J. Bertrand e, in appendice, articoli di illustri scienziati (Poincaré, Lejeune Dirichlet, Bertrand, Darboux, Puiseux, Bonnet, Serret e dello stesso Lagrange) articoli che portano notevoli contributi e chiarimenti al testo. Però la prima e la seconda edizione della « *Mécanique Analytique* » costituiscono una rarità bibliografica, nè credo facile trovare in commercio la terza e la quarta edizione. Quindi, assai opportuna mi sembra l'iniziativa dell'editore Blanchard di ristampare la quarta edizione assieme a tutte le note del Bertrand e agli articoli a cui si è già accennato; l'editore ha così messo a disposizione di tutti gli studiosi un'opera scientifica che, come si è detto, è veramente di fondamentale importanza.

DARIO GRAFFI

W. S. LOUD, *Periodic Solutions of Perturbed Second-Order Autonomous Equations*. *Memoirs of the American Mathematical Society*, n. 47.

In molti problemi relativi alle oscillazioni non lineari si considerano equazioni differenziali (dette debolmente non lineari) in cui tutti i termini non lineari sono proporzionali ad un parametro ε molto piccolo, inoltre per $\varepsilon = 0$ dette equazioni si riducono a quella del moto armonico.

Nella presente memoria si considera l'equazione più generale:

$$(1) \quad x + g(x, \dot{x}) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$$

dove $g(x, \dot{x})$, $f(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$ sono funzioni, rispettivamente, di classe C^2 e C^1 relativamente alle variabili da cui dipendono, inoltre f è una funzione periodica di periodo (minimo) T rispetto alla variabile t . Ovviamente la (1) contiene due termini non lineari rappresentati dalle funzioni g ed εf di cui solo il secondo debolmente non lineare. Si ammette però che l'equazione ottenuta da (1) supponendo $\varepsilon = 0$ abbia una soluzione periodica $x_0(t)$, di periodo L_0 in rapporto razionale con T , soluzione che può ridursi anche a costante.

Ciò premesso, il problema trattato nella memoria è il seguente: dimostrare l'eventuale esistenza, per piccoli valori di ε , di soluzioni di (1) con periodo L uguale al minimo comune multiplo fra T e L_0 o di periodo T se $x_0(t)$ è costante, soluzioni esprimibili nella forma:

$$(2) \quad x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon).$$

Il problema è risolto, in maniera veramente completa, con un metodo che consiste in un'ampia estensione di un procedimento di Poincaré. In tal

modo si dimostra non solo l'esistenza, in generale, di soluzioni della (1) del tipo (2), ma anche se ne studia, in modo pure completo, la stabilità.

Infine è da osservare che nella memoria si considera anche il caso autonomo, cioè si suppone f indipendente da t e, anche in questo caso, si dimostra che, in generale, per ε piccolo, esistono soluzioni periodiche di periodo lievemente diverso da L_0 , soluzioni di cui si studia la stabilità.

Poichè in varie questioni concrete possono presentarsi equazioni del tipo (1), i risultati della memoria sono indubbiamente di un certo interesse, anche applicativo.

DARIO GRAFFI

Advances in Game Theory, edited by M. Dresher, L. S. Shapley, A. W. Tucker, Annals of Mathematics Studies, Number 52, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1964, pp. VIII+679, prezzo \$ 8.50.

Dopo i quattro volumi di *Contributions to the theory of Games* apparsi nella stessa serie (n. 24 (1950), n. 28 (1953), n. 39 (1957) e n. 40 (1959)), il presente, come dice la prefazione, ha uno scopo diverso: essendo la teoria già assestata e in rapida diffusione, lo scopo è di raccogliere un campionario rappresentativo delle svariate ricerche che si pubblicano un po' dovunque, con difficoltà di averne conoscenza. I 29 articoli coprono infatti un'area d'interessi vastissima e sono assai diversi sotto molti aspetti, salvo il criterio di scelta basato sull'esistenza di interesse concettuale dal punto di vista della teoria dei giochi (e non esclusivamente matematico o esclusivamente applicativo). L'unico modo utile di dire qualcosa sembra quello di accennare a titolo di esempio a pochi argomenti adatti: un sunto di poche righe sui singoli articoli si può trovare nella prefazione ma dice poco, e il tentativo di fare una sintesi è stato anche in quella sede abbandonato come inappropriato.

La distinzione che più incide sulla natura dei problemi è sempre, come è ben noto, quella fra giochi tra 2 persone, o tra n ($n \geq 3$), ai due campi appartengono i primi 13 articoli e i successivi 16.

Un esempio del primo è il semplice gioco di « ricerca » (n. 3): un giocatore sceglie un numero (tra 1 ed n) e l'altro cerca di indovinarlo col minimo numero di tentativi, venendo informato ogni volta se sbaglia per eccesso o per difetto. Si possono naturalmente considerare molte varianti e generalizzazioni, e come tali si possono considerare anche i problemi di « fuga e inseguimento » (n. 9, v. anche n. 8): come esempio, se n navi inseguono m navi (nemiche, o contrabbandiere, ecc.), la posizione degli inseguitori è un punto P dello spazio S' a $2n$ dimensioni e quella degli inseguiti un punto Q di S'' a $2m$ dimensioni; il « raggiungimento » (secondo lo scopo che interessa e il modo di precisarlo) sarà un insieme F di punti dello spazio prodotto $S = S' \times S''$; i movimenti possibili per i due partiti si traducono in limitazioni sul moto dei punti P e Q rispettivamente; il successo dipende dal raggiungere o no la regione F in un tempo finito. Anche qui è ovvio pensare varianti: più realistico è caratterizzare la situazione istantanea di ogni nave mediante 4 coordinate (posizione e velocità) anzichè 2, dato il tempo per virare eccetera; ciò porta a considerare in generale distanze asimmetriche; del resto la trattazione è svolta in uno spazio astratto con funzione di distanza (rappresentante il minimo tempo di spostamento da punto a punto, risp. in S' ed S'') asimmetrica e convessa, e compatto. L'esempio delle navi (qui sviluppato per chiarimento) nell'articolo è accennato tra parentesi in due righe.

Uno strano esempio di come l'impostazione secondo i concetti della teoria

dei giochi (qui: il minimax) si presti ad agevolare dimostrazioni in altri campi è dato dal seguente teorema geometrico (n. 4). In qualunque spazio metrico connesso e compatto esiste un unico valore K (distanza di rendez-vous, com'è suggestivamente proposto di chiamarla) tale che, per ogni insieme finito di punti, è sempre possibile trovare un punto P per cui la media aritmetica delle distanze dai punti dati valga K . Si dimostra poi che K è compreso tra $d/2$ e d (d = diametro), disuguaglianza non migliorabile per spazi generici, ma che diviene più restrittiva sotto condizioni più particolari (p. es., per figure piane il limite inferiore sembra sia circa $2d/3$).

Nel caso di $n \geq 3$ giocatori la natura dei problemi si complica per la ben nota possibilità di coalizioni (ad es. cartelli, sindacati, ecc., coi ben noti rompicapi per la teoria economica). Vi sono, anche nella teoria dei giochi, svariati tentativi per « risolvere », o almeno analizzare, tali rompicapi (in vari sensi, non sempre facili a distinguersi e caratterizzarsi: qual'è il comportamento « di fatto »? e quale quello « ragionevole » per ciascuno isolatamente? e quale sarebbe « ragionevole » come base di accordo collettivo?).

Sono innumerevoli i diversi schemi che si possono prendere in considerazione. Ad es. quello dei « giochi semplici composti » (studiato in n. 15) consiste, come nel caso della designazione dei candidati alla presidenza degli Stati Uniti, in giochi per la conquista della maggioranza in sottogruppi, e quindi nel gruppo formato dai delegati dei sottogruppi (e i gradini potrebbero essere più di due). Analoghi problemi conosciamo per maggioranze formate da partiti in ciascuno dei quali si hanno maggioranze formate da correnti e così via per sottocorrenti, personaggi, semplici membri.

La questione al fondo della maggior parte tra gli ultimi 16 articoli (ed anche la più fondamentale) si può esprimere come ricerca di un « valore » per la situazione di ogni partecipante a un gioco, basata su schemi di « contrattazione », di « equilibrio », di « arbitraggio », di caratterizzazione mediante condizioni assiomatiche più o meno « naturali ». Ma sembra impossibile trovare qualche idea sufficientemente semplice e perspicua da riferire in brevi parole, consentendo di andar oltre questi accenni generici.

BRUNO DE FINETTI

RICHARD L. PALAIS, *Seminar on the Atiyah Singer index theorem*, with contributions by M. F. Atiyah, A. Borel, E. E. Floyd, R. T. Seeley, W. Shih, R. Solovay. Princeton, New Jersey. Princeton University Press, 1965. pp. X+366, \$ 7.50.

Sia X una varietà differenziabile compatta, orientabile e orientata. Siano E ed F due fibrati (differenziabili) vettoriali complessi su X e sia d un operatore differenziale da E ad F . Se d è ellittico, il nucleo ed il conucleo di d hanno dimensione finita. La differenza fra queste dimensioni si chiama l'indice analitico di d . Poichè esso resta invariato per deformazioni, I. M. Gelfand ha posto il problema se sia possibile calcolare l'indice analitico in termini topologici. Il teorema dell'indice di Atiyah Singer risponde affermativamente a tale questione, esprimendo l'indice analitico di d mediante le classi di Todd della struttura tangente a X e mediante una classe di coomologia razionale associata al « simbolo » di d . Si tratta di un risultato estremamente significativo, al quale hanno portato contributi l'analisi funzionale e la topologia algebrica, e che trova l'antecedente più diretto nel teorema di Riemann-Roch nella formulazione di Hirzebruch.

Il volume in esame raccoglie gli appunti di un seminario sull'argomento

tenuto a Princeton nel 1963-1964 per iniziativa di A. Borel. Si tratta di un libro eccellente che, insieme alla dimostrazione del teorema dell'indice, raccoglie il materiale necessario di analisi e di topologia algebrica, facendo una trattazione essenzialmente autosufficiente dell'analisi funzionale legata al problema in questione, ma presupponendo una certa conoscenza della topologia algebrica.

Ecco gli autori ed i titoli dei vari seminari:

- A. BOREL, Enunciato del teorema dell'indice e traccia della dimostrazione.
- R. M. SOLOVAY, Riassunto della teoria K .
- R. M. SOLOVAY, L'indice topologico di un operatore associato ad una G struttura.
- R. S. PALAIS, Operatori differenziali su fibrati vettoriali.
- R. M. SOLOVAY, Indici analitici di alcuni operatori.
- R. S. PALAIS, Riassunto di analisi funzionale.
- R. S. PALAIS, Operatori di Fredholm.
- R. S. PALAIS, Catene di spazi di Hilbert.
- R. S. PALAIS, La catena discreta di Sobolev di un fibrato vettoriale.
- R. S. PALAIS, La catena continua di Sobolev di un fibrato vettoriale.
- R. S. PALAIS, L'algebra di Seeley.
- R. S. PALAIS, Invarianza omotopica dell'indice.
- R. S. PALAIS, Somme di Whitney.
- R. S. PALAIS, Prodotti tensoriali.
- R. M. SOLOVAY, Definizione di i_n e di i_t in $K(M)$.
- R. S. PALAIS, e R. T. SEELEY, Costruzione di Int_k .
- R. S. PALAIS e R. T. SEELEY, Invarianza per cobordismo dell'indice analitico.
- E. E. FLOYD, Gruppi di bordismo di fibrati.
- R. M. SOLOVAY, Il teorema dell'indice: applicazioni.
- M. F. ATIYAH, Il teorema dell'indice per varietà a bordo.
- SHIH WEI SHU, Classi caratteristiche non stabili e indice topologico per operatori ellittici classici.

EDOARDO VESENTINI

F. OORT, *Commutative group schemes*, Springer-Verlag, Berlino, 1966, pp. 137.

Si tratta di un dattiloscritto riprodotto fotomeccanicamente, facente parte di una collezione il cui scopo è quello della rapida pubblicazione su argomenti di attualità. Consiste di tre capitoli, il cui tema generale è l'applicazione della teoria dei gruppi analitici commutativi (qui chiamati schemi gruppali commutativi finiti piatti; non si tratta però esattamente della stessa cosa) alle varietà abeliane. Il primo capitolo contiene definizioni e materiale preparatorio; il secondo capitolo consiste principalmente nella classificazione dei gruppi analitici, e contiene inoltre una sezione (la 13) pressoché indipendente dal resto, ed una (la 15) di osservazioni, problemi e congetture. Cercherò di descrivere il contenuto di questo capitolo, ma sarò costretto a farlo con linguaggio totalmente diverso da quello in cui è scritto; dovrò dilungarmi un po' sulle definizioni, dato che queste non fanno parte del normale bagaglio di cognizioni dei matematici non specializzati in questo campo.

Si considerino due successioni equipotenti $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$, di « variabili » (variabili in qualche anello topologico completo Ω da specificare volta per volta); siano $g_i(x; y)$ serie formali di potenze nelle x, y , tante quante sono le x_i , a coefficienti in un corpo k , che nei casi interessanti dovrà essere

di caratteristica $p \neq 0$ e algebricamente chiuso, si consideri ogni valore $x_i \rightarrow \xi_i \in \Omega$ dato alle x_i , o alle y_i , come un punto di uno spazio G , se le $g_i(\xi; \eta)$ convergono a valori $\zeta_i \in \Omega$, le formule $\zeta_i = g_i(\xi; \eta)$ definiscono una legge di composizione in G , che indicheremo addittivamente dato che nel seguito sarà sempre commutativa: $\zeta = \xi + \eta$, se G diviene, con tale legge, un gruppo, e se sono soddisfatte certe condizioni di finitezza, G viene detto un *gruppo analitico*. Il capitolo 2 contiene principalmente la classificazione (già nota) dei gruppi analitici commutativi; escludendo alcuni che non interessano per il seguito, vi è una equivalenza fra la categoria dei gruppi analitici commutativi e la categoria di certi K moduli liberi finiti (detti *canonici*), K essendo un anello valutante discreto completo, di caratteristica zero, di corpo residuo k , e con valutazione p adica non ramificata. Come conseguenza si trova che ogni G è isogeno ad un prodotto diretto di certi $G_{r,s}$ ben determinati, ove (r, s) è o una coppia di interi positivi primi fra loro, ovvero una delle coppie $(0, 1)$, $(1, 0)$ (i casi esclusi sarebbero le coppie (r, ∞) e (∞, s)). Quest'ultimo risultato è raggiunto dall'A., con dimostrazioni spesso solo schizzate, mediante la considerazione preliminare dei gruppi G per i quali Ω sia un anello artiniano; tale caso da una parte porta le semplificazioni dovute alla «piccolezza» degli anelli artiniani, e discretezza della loro topologia; d'altra parte porta difficoltà dovute al fatto che per un tale anello il «modulo canonico» che gli dovrebbe corrispondere non può essere libero.

Ho menzionato separatamente le sezioni 13 e 15. Nella 13 l'A. stabilisce il risultato seguente: $\dim \text{Ext}(G_n, A) = \dim A$; qui, A è varietà abeliana, G_n è il gruppo vettoriale di dimensione 1 (vi è una sola g , data da $g(x, y) = x + y$), ed Ext denota, al solito, lo spazio (risulta essere uno spazio vettoriale) delle estensioni razionali del gruppo A mediante il gruppo G_n ; è un risultato nuovo, stabilito anche, ma non ancora pubblicato, da M. Miyanishi; non è necessario per il resto della trattazione, nè ha per ora altre conseguenze (da non confondere con il vecchio risultato duale $\dim \text{Ext}(A, G_n) = \dim A$, di ben altra portata). La sezione 15 contiene fra l'altro due problemi: premettiamo che se si ha una varietà abeliana A su k di dimensione n , la legge di composizione su A induce, nell'anello locale che è il completamento dell'anello delle funzioni razionali su A che sono definite nel punto identità E , un insieme di n serie di potenze $g_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$, che a loro volta danno un gruppo analitico G , detto il *completamento* di A (si tratta in realtà di un intorno di E). Se k ha caratteristica zero tale gruppo analitico è uno spazio vettoriale di dimensione n su k , una cui base è data dagli integrali di prima specie su A che si annullano in E , se k ha caratteristica p , G ricade sotto la classificazione descritta più sopra, ed è quindi isogeno al prodotto di vari $G_{r,s}$; fu osservato nel 1956 dal recensore che se vi sono soltanto dei $G_{1,0}$, il numero f dei differenziali di prima specie di tipo $z^{-1}dz$ linearmente indipendenti su k è n , mentre in ogni altro caso è $f < n$, ma è certamente positivo il numero e dei differenziali esatti di prima specie linearmente indipendenti su k (contrariamente al caso della caratteristica zero, quando si ha sempre $f = e = 0$); f è invariante per isogenie, mentre e non lo è; si pensava qualche anno fa che il massimo raggiunto da e in una classe di isogenia fosse importante nella classificazione delle varietà abeliane, ma si è poi visto che tale massimo dipende esclusivamente dagli r_i, s_i ; l'A. congettura ora che valga sempre la relazione $e \leq \sum \min(r_i, s_i)$, è una congettura interessante e forse dotata di qualche conseguenza. [Aggiunta: la verità della congettura è stata dimostrata recentemente da M. Poletti]

L'altro problema (posto dal recensore nel 1958) chiede se possa esistere qualche varietà abeliana semplice (ossia priva di sottovarietà abeliane proprie di dimensione positiva) di «tipo misto», e cioè tale che il suo completamento G contenga sia qualche $G_{1,n}$, sia qualche altro $G_{r,s}$ con $r \neq 0 \neq s$; o, equivalentemente, tale che $f \neq 0 \neq e$; l'A. discute correttamente un esempio (jacobiana di una curva di genere 2) che considera un «buon candidato» per dare risposta

positiva al quesito, ma per una misinterpretazione di risultati di J Igusa (in vero male esposti nell'originale) non riesce ad ottenere una risposta decisiva; in realtà la risposta è affermativa, e si ottiene proprio usando quell'esempio.

Il capitolo 3 contiene i risultati più riposti; principale è il seguente, liberamente tradotto: sia A una varietà abeliana, A' la sua duale (varietà di Picard di A); sia G il completamento di A , G' quello di A' ; allora G' è duale di G , nel senso che il K modulo canonico legato a G' è duale, nella solita dualità dell'algebra lineare, di quello legato a G . Ne segue, come corollario, il teorema di simmetria, che asserisce che G è autoduale a meno di isogenie; ossia che i $G_{r,s}$ che compaiono in G , ad eccezione di $G_{1,1}$, vi compaiono accoppiati: $G_{r,s} \times G_{s,r}$, e come altro corollario segue il teorema di dualità: $A'' \cong A$, ossia A è la varietà di Picard di A' . Questi tre risultati (i primi due del censore, il terzo di P. Cartier e M. Nishi) aprono la via all'analogo, in caratteristica p , del classico « problema di inversione » di Jacobi, ed è utilissimo che essi abbiano trovato posto in una pubblicazione che, per il formato, si avvicina più ad un libro che ad un articolo di periodico. Il capitolo chiude con due questioni che l'A. considera aperte, ma che in realtà non lo sono. La seconda è troppo tecnica per essere riportata qui; la prima si chiede quanto segue: visto che ad ogni A corrisponde il suo completamento G , e che ad un omomorfismo $A \rightarrow A_1$ corrisponde, functorialmente, un ben definito omomorfismo $G \rightarrow G_1$; visto che vi è un isomorfismo canonico $\chi: A \rightarrow A''$ di A sulla propria biduale, ad esso corrisponderà un $\nu: G \rightarrow G''$; ma vi è un isomorfismo canonico $\nu': G \rightarrow G'$, come sempre succede in algebra lineare per le dualità bennate; l'A. si chiede se vi sia qualche relazione fra ν e ν' . La domanda è assai naturale, ma è sfuggito all'A. che la risposta (anch'essa naturale, ossia $\nu = \nu'$) è stata fornita dal censore nel 1961 (benché la dimostrazione completa sia uscita solo nel 1966).

Un discorso a parte merita il tipo di esposizione adottato per questo lavoro; l'ambiente in cui l'A. si pone è quello della teoria degli schemi di A Grothendieck, e il linguaggio è quello delle frecce; l'ambiente degli schemi è adeguatamente descritto nell'opera che Grothendieck e J. Dieudonné stanno pubblicando (*Éléments de Géométrie algébrique*, Inst des Hautes Etudes Scient.); sfortunatamente quest'opera non è ancora giunta alla descrizione degli schemi gruppali, cosicché l'A. deve continuamente rimandare a note di seminari, alcune delle quali sono introvabili (per un lettore che non appartenga a quella ristretta categoria di persone che già conoscono i risultati esposti nell'opera recensita, e che presumibilmente sono in possesso di tutti i seminari sull'argomento), mentre altre, la maggioranza, non contengono tutte le dimostrazioni degli enunciati [e qui per inciso si può osservare che sta diventando di moda, tra i matematici bene, il non pubblicare, preferendo invece circolare le proprie lucubrazioni in una ristretta cerchia di sostenitori]. Restringendo un po' l'ambiente, dagli schemi gruppali ai gruppi analitici, l'A. avrebbe potuto avvalersi dei risultati, ormai vagliati e completamente dimostrati e pubblicati, ottenuti in questo campo da J Dieudonné e dal censore. D'altro canto, per controbilanciare la difficoltà di documentazione l'A. avrebbe potuto usare un linguaggio estremamente chiaro, e magari prolioso, senza con ciò rinunciare alla utilissima visualizzazione fornita dai diagrammi; sembra invece che egli abbia adottato una specie di cifrario, forse concordato e compreso in qualche ambiente ristrettissimo, e comunque mai codificato per iscritto, nel quale ad esempio la forma dell'asta di una freccia è latrice di significati ben precisi; il riuscire a decifrare un enunciato (che non sia già noto), o seguire una dimostrazione, può divenire sotto queste condizioni un arduo problema di decodificazione.

In conclusione, direi che il libro sarà utile più che altro al giovane con una buona preparazione « categorica », che desideri dedicarsi a questo campo e che consideri come ben speso il tempo impiegato ad imparare il linguaggio.

IACOPO BARSOTTI

Atti del Convegno Lagrangiano (Torino 22-25 ottobre 1963),
Torino, Accademia delle Scienze, 1964, pp. 490.

L'Accademia delle Scienze di Torino ha commemorato nell'ottobre 1963 il 150° anniversario della scomparsa di uno dei propri fondatori, Luigi Lagrange, con un convegno internazionale, dedicato al Calcolo delle variazioni e alla Meccanica analitica. Il testo delle 22 relazioni, tenute da studiosi invitati dall'Accademia, forma oggetto del volume in esame, il quale ha inizio con il saluto del Presidente dell'Accademia (l'autorevole romanista G. Grosso) agli scienziati convenuti al simposio e con la comunicazione, che il terzo premio M. Pannetti è stato conferito a W. Prager, professore già nelle Università di Göttingen e di Istanbul e ora alla Brown University of Providence.

La prima conferenza, tenuta da F. Tricomi nella seduta inaugurale del convegno, ha carattere introduttivo, sia perchè è rivolta anche ai non matematici, sia perchè, oltre a uno sguardo alla biografia di Lagrange, il quale è nato nella capitale del regno di Sardegna e ha trascorso la vita, oltrechè nella stessa Torino, a Berlino, e anche, durante il periodo della rivoluzione, a Parigi, nel cui Pantheon è sepolto, illustra i cospicui contributi arrecati da Lagrange anche ad altri capitoli della matematica (oltre a quelli che formano oggetto del simposio): all'algebra con lo studio delle possibili permutazioni delle radici di un'equazione algebrica, agli sviluppi di Taylor, nei quali l'importanza del resto di Lagrange è universalmente nota, alla teoria delle equazioni differenziali ordinarie lineari con il classico metodo della variazione delle costanti arbitrarie. A tal proposito Tricomi ricorda come l'idea, che guidò Lagrange alla scoperta del proprio « metodo », traeva origine da un problema di meccanica celeste, e conclude il proprio dire soffermandosi su questo riferimento « meritevole di essere seriamente meditato... nei nostri tempi, in cui un'esagerata tendenza della matematica all'astrazione più spinta, disgusta e respinge quelli che della matematica hanno bisogno per applicarla. Invero l'imminente divorzio della matematica dalle sue applicazioni nuocerà certamente a queste ultime, ma anche e forse ancor più alla matematica pura ».

Con la relazione di M. Picone (*Criteri sufficienti nel Calcolo delle variazioni e loro applicazione*) ha inizio una delle due parti del convegno: oggetto del rapporto è il contenuto di una recente Memoria dell'A., alla quale il lettore viene rinviato per le dimostrazioni. Picone considera integrali pluridimensionali dipendenti da un vettore a più componenti e dalle sue derivate parziali di ordine qualunque, ed enuncia criteri sufficienti per il minimo assoluto, ai quali è pervenuto mediante la considerazione di quelle funzioni di invarianza, che aveva già costruito in una Memoria del 1961. Seguono applicazioni a teoremi di unicità per le soluzioni di equazioni funzionali e alla separazione degli autovalori di un parametro, dal quale esse dipendono.

Oggetto del successivo rapporto (tenuto da S. Cinquini) è il metodo di L. Tonelli. L'opera del Discepolo dell'Arzelà viene collegata al contributo arrecato al calcolo delle variazioni da Lagrange, il quale, mediante la considerazione della « variazione », si era posto sul piano dell'analisi funzionale, ed è pertanto un effettivo precursore di quel metodo diretto, che, sorto alla distanza di circa un secolo e mezzo dalla comunicazione tenuta dall'eminente Torinese alla propria R. Accademia delle Scienze, considera il calcolo delle variazioni come un capitolo del calcolo funzionale, ponendo alla base della teoria stessa il concetto di semicontinuità. D'altra parte, a più di mezzo secolo dalle prime ricerche di Tonelli, il metodo di lui è tuttora ben efficace per affrontare lo studio di nuove classi di problemi variazionali: vengono citati risultati, raggiunti recentemente dal Relatore e da N. Berruti Onesti per integrali curvilinei in forma parametrica dipendenti anche da elementi differenziali di ordine superiore, e viene compiuto un raffinato esame comparativo di concetti fondamentali introdotti da Tonelli e ripresi dalla sua scuola in altre condizioni.

Il calcolo delle variazioni per gli integrali di Fubini Tonelli forma oggetto della relazione di S. Faedo. L'A., richiamate le ricerche di G. Fubini e quelle di Tonelli, espone lo sviluppo della teoria iniziata dal Relatore stesso (secondo il metodo diretto di Tonelli) e sviluppata da E. Magenes. Faedo rileva che dal complesso dei risultati raggiunti (dagli autori citati e da L. Lombardi) emergono due punti della teoria (divario tra condizioni necessarie e condizioni sufficienti per la semicontinuità, e definizione di integrale quasi regolare positivo), dai quali egli è stato indotto a intraprendere una nuova trattazione degli integrali di Fubini Tonelli, facendo appello, anziché al concetto di integrale di Lebesgue, a quello di Weierstrass. A tale nozione d'integrale aveva fatto ricorso anche Tonelli all'inizio delle proprie ricerche variazionali, ma qualche anno dopo era ritornato sui risultati così raggiunti, affinché tutta la propria trattazione usufruisse soltanto dell'integrale di Lebesgue.

M. Frechet riassume alcune estensioni del calcolo delle variazioni a spazi astratti, rinviando ad altri propri lavori.

Citiamo subito (senza seguire l'ordine del volume) la relazione di L. C. Young, nella quale lo sviluppo della teoria è illustrato anche da elementari considerazioni geometriche: l'A. parla delle proprie ricerche (alla base delle quali è l'idea di estendere noti concetti mediante le nozioni di curva generalizzata e di varietà generalizzata) e delle relazioni tra il calcolo delle variazioni e la meccanica dei fluidi.

Recenti problemi della tecnica hanno condotto a questioni di massimo o di minimo con vincoli unilaterali, alle quali è dedicato il rapporto di L. Cesari (*Problemi di Lagrange con vincoli unilaterali*). Per ragioni di perspicuità la relazione si sofferma inizialmente sul caso dei problemi finiti con particolare riferimento al teorema di dualità. A questi preliminari segue la parte più importante del rapporto, la quale ha come oggetto i problemi di controllo ottimo, vale a dire problemi di Lagrange (del calcolo delle variazioni) con vincoli unilaterali. Viene illustrato il complesso delle ricerche compiute, a partire dal 1959, da L. S. Pontryagin, e vengono esposti i risultati raggiunti da A. F. Filippov e dallo stesso Cesari, introducendo nello studio dei problemi di controllo i metodi diretti della Scuola di Tonelli, mentre per le relative dimostrazioni l'A. rinvia alle proprie Memorie originali.

Anche la relazione di G. Fichera (*Un teorema generale di semicontinuità per gli integrali multipli e sue applicazioni alla fisica matematica*) trae origine da una questione applicativa. Nel 1959 A. Signorini si era occupato di una classe di problemi elastostatici, relativi a corpi a tre dimensioni soggetti sul contorno a vincoli unilaterali; tali problemi conducono a problemi di valori al contorno, non lineari, per le equazioni indefinite dell'equilibrio, le cui condizioni al contorno sono state denominate ambigue, perchè sulla parte del contorno, sulla quale i vincoli sono unilaterali, sono prefissati due insiemi di condizioni, espresse da equazioni o inequazioni, senza che sia noto, a priori, se in un punto del contorno le funzioni incognite devono soddisfare al primo o al secondo insieme di condizioni. Signorini aveva provato l'equivalenza del problema in questione con un problema variazionale, quando la soluzione di questo ultimo problema viene cercata nella classe delle funzioni continue insieme con le loro derivate parziali prime, ma anche in casi molto semplici in tale classe non esiste il minimo del problema variazionale. Nell'ordine di idee dei metodi diretti, già citati nella presente recensione, Fichera ha affrontato il problema variazionale, ricercando la soluzione in una classe più ampia di funzioni. Nella relazione viene enunciato un teorema di semicontinuità, che può essere molto utile anche in altri problemi elastici, e un teorema di esistenza del minimo assoluto, mentre per la trattazione completa del problema, nella quale figura anche un teorema di unicità, l'A. rinvia ad altra propria pubblicazione.

G. Stampacchia (*Il principio di minimo nel calcolo delle variazioni*) inizia il suo dire, rilevando il posto preminente che il calcolo delle variazioni ha tuttora nell'ambito della matematica anche se, per esempio nel 1962, non

molte sono state le pubblicazioni aventi come oggetto, in senso stretto, l'argomento stesso. L'A. illustra, in modo efficacissimo, l'evoluzione che ha subito la teoria delle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico sotto l'influsso del calcolo delle variazioni: Con i metodi diretti (tra cui ha emerso quello della Scuola di Tonelli) il calcolo delle variazioni era divenuto indipendente dalla teoria delle equazioni differenziali, e, stabilita l'esistenza dell'estremo assoluto, si deducono soluzioni di problemi relativi alle equazioni stesse. Attualmente la teoria delle equazioni a derivate parziali usufruisce direttamente dei metodi del calcolo delle variazioni. Stampacchia riporta risultati, raggiunti recentemente anche da parte di altri autori e per equazioni di ordine superiore al secondo, cita ricerche che si annunciano molto promettenti, e conclude rilevando l'importanza di questi studi, non soltanto per l'Analisi, ma anche per una più chiara interpretazione di fenomeni fisici.

Segue il rapporto di R. Garnier, nel quale l'A. riferisce su un proprio contributo al metodo di Birkhoff per la risoluzione del problema di Riemann-Hilbert.

Oggetto della relazione di W. Prager (*Unilateral constraints in mechanics of continua*), lo scienziato già citato, perchè premiato dall'«Accademia», è il comportamento meccanico di un solido elastico a blocco perfetto (perfectly locking). Lo sviluppo della teoria del Relatore presenta maggior generalità di quanto era stato fatto precedentemente.

A. Miele (*Variational methods in aeronautics*) rivolge uno sguardo all'applicazione del calcolo delle variazioni all'ingegneria aerospaziale. Dopo un riesame della teoria dei problemi di Mayer viene considerato il problema dell'ottima traiettoria di volo in due diverse condizioni, secondochè questa è non vincolata o vincolata. Nel primo caso il veicolo è soggetto soltanto a forze aerodinamiche, a forze gravitazionali e a spinte propulsive, e il problema presenta tre gradi di libertà. Nell'altro caso c'è soltanto un grado di libertà, perchè la traiettoria di volo è soggetta a due ulteriori condizioni di vincolo, corrispondenti a tre distinti problemi: volo quasi non perturbato su una terra piana, volo perturbato su una terra piana, volo perturbato su una terra sferica. L'A. conclude il suo dire, affermando che il calcolo delle variazioni diverrà lo strumento apposito per i successivi studi relativi ai veicoli spaziali.

La relazione di A. Pignedoli (*La meccanica analitica e il suo sviluppo (con particolare riguardo al contributo della Scuola italiana)*) può essere considerata un'introduzione all'altra parte del simposio. Nell'ampia esposizione, in cui l'A. esordisce, rilevando che la meccanica moderna, la quale è meccanica analitica in senso lato, ha inizio con Lagrange, il lettore trova una preziosa bibliografia di ricerche di autori italiani, su alcune delle quali il Relatore si sofferma in modo particolare.

Il successivo rapporto, dedicato al problema dei tre corpi è dovuto a C. Agostinelli. L'A. illustra l'importanza della celebre Memoria di Lagrange (*Essai sur le problème des trois corps*), la quale è stata la base delle successive ricerche, tra cui quelle di Poincaré, Hill, Agostinelli per il problema ristretto dei tre corpi.

D. Graffi (*La teoria delle oscillazioni da Lagrange ai nostri giorni*) inizia il proprio dire, ricordando i contributi alla teoria delle oscillazioni contenuti nella «*Mécanique analytique*» di Lagrange; e nel prosieguo della propria perspicua esposizione si intrattiene su alcuni problemi della teoria delle oscillazioni e in particolare di quelle non lineari con un grado di libertà.

La relazione di R. Sauer ha come oggetto l'aerodinamica dei fluidi compressibili, i cui problemi nel caso supersonico danno luogo a equazioni a derivate parziali quasi lineari di tipo iperbolico; e pertanto si usufruisce della teoria delle caratteristiche. Nel caso delle correnti transoniche le equazioni a derivate parziali sono di tipo misto, e, nonostante il complesso dei risultati raggiunti da F. Tricomi e da altri autori, esse richiedono un'integrazione approssimata, la quale viene fatta mediante l'uso dei calcolatori elettronici. A tal proposito l'A. conclude il proprio rapporto con la speranza di una

« sintesi della matematica pura con la matematica applicata », « affinché non accada che la matematica pura degeneri in una matematica "non applicabile", e la matematica applicata in una matematica "impura"! ».

Ancora alla meccanica dei fluidi e precisamente all'applicazione all'idrodinamica delle proprietà generali della teoria delle equazioni a derivate parziali è dedicato un breve rapporto di L. V. Ovsjannikov.

Di altro argomento sono le due successive relazioni. La prima (di I. Prigogine e P. Résibois) ha come oggetto il metodo cinetico in fisica statistica, in quale viene considerato sia dal punto di vista della meccanica classica, sia di quello della meccanica quantistica. L'altra, dovuta a G. Zin, dopo un'introduzione sull'aspetto classico della meccanica statistica, tratta dell'evoluzione del problema ergodico (in conseguenza dei progressi della matematica), il quale viene esaminato dai tempi di Boltzmann e Maxwell all'attuale posizione. L'A. distingue quattro fasi dovute rispettivamente alle ipotesi ergodica, quasi ergodica, della transitività metrica, dell'unicità dell'integrale dell'energia.

Rimangono ancora tre relazioni, nella prima delle quali (*Dalla meccanica lagrangiana a quella einsteiniana*) B. Finzi, autorevole e appassionato cultore della relatività einsteiniana, espone i successivi sviluppi di tale capitolo della meccanica, illustrando la necessità (sentita fino dal 1918) della teoria relativistica unitaria. Nella relatività generale, a differenza dall'inerzia e dalla gravitazione, il campo elettromagnetico non aveva trovato interpretazione nella geometria dello spazio tempo; pertanto si sentiva la necessità di una nuova trattazione, la quale, basandosi su un unico campo spazio temporale, desse una spiegazione di carattere geometrico dell'inerzia, della gravitazione e dell'elettricità. Dopo decenni di intenso lavoro Einstein è pervenuto all'ultima teoria relativistica unitaria, nella quale lo spazio tempo è individuato dal campo di un unico tensore fondamentale non simmetrico, del quale la parte simmetrica rappresenta i potenziali gravitazionale e inerziale, mentre la parte emisimmetrica individua il campo elettromagnetico.

Nel successivo rapporto (E. Persico, *Sviluppi e risultati della meccanica ondulatoria*), dopo un'introduzione sulle idee, che hanno guidato De Broglie, Schrödinger, Max Born, Heisenberg a costruire la meccanica ondulatoria e a inquadrarla nella meccanica quantistica, e sulla meccanica ondulatoria relativistica di Dirac, il Relatore rileva i campi della fisica, nei quali la meccanica ondulatoria ha ottenuto i risultati più brillanti: fenomeni di diffrazione degli elettroni e dei neutroni, struttura degli atomi e delle molecole, fisica dei solidi e loro distinzione in tre classi nettamente e qualitativamente distinte nei confronti della conduzione elettrica (conduttori, semiconduttori, isolanti), applicazione a « particelle », ciascuna delle quali è rappresentata da un « campo ». A questo punto la meccanica ondulatoria rivela i limiti della propria validità nel dominio delle collisioni tra particelle di alta energia, quali sono quelle dei raggi cosmici e dei moderni grandi acceleratori: subentra la teoria dei campi che, pur essendo tuttora in fase di sviluppo, è già pervenuta a notevolissimi risultati di elettrodinamica quantistica.

Infine M. Verde si occupa degli sviluppi più recenti del metodo lagrangiano nella dinamica subatomica: tale metodo è adeguato per domini spaziali di diametro maggiore di 10^{-13} cm., mentre, quando le distanze sono inferiori a tale numero, si presentano difficoltà di natura matematica, che vengono illustrate dall'A. insieme con i possibili sviluppi delle teorie future.

L'illustre Accademia delle Scienze di Torino, cui va la rinnovata gratitudine degli italiani per le celebrazioni lagrangiane, ha fornito agli studiosi questo prezioso volume, il quale riproduce i lavori di un convegno, che si segnala per aver riunito non soltanto analisti e meccanici, ma anche fisici e ingegneri; ed è spontaneo formulare l'augurio, che la lettura delle presenti relazioni contribuisca a orientare l'indagine, in modo che le future ricerche dei matematici possano essere efficacemente utilizzate dagli altri scienziati per il progresso delle discipline applicative.

SILVIO CINQUINI