
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FLAVIO PREVIALE

Reticoli metrici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 21
(1966), n.3, p. 243–250.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_3_243_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Reticoli metrici (*)

FLAVIO PREVIALE (Torino)

Riassunto. - Si dà una nuova definizione di reticolo metrico, fondata su una assiomatizzazione del concetto di diametro di un insieme di punti di uno spazio metrico. Si mostra come, sotto la condizione che ogni filtro massimale del reticolo contenga elementi di diametro arbitrariamente piccolo, sia possibile conferire all'insieme dei filtri massimali di un reticolo metrico la struttura di uno spazio pseudo-metrico.

Introduzione.

In uno spazio metrico, la distanza tra due insiemi di punti viene usualmente definita come l'estremo inferiore delle mutue distanze tra i punti dell'uno e dell'altro insieme. Tuttavia essa risulta esprimibile (in un modo che sembra meglio riflettere il carattere operativo della nozione stessa) anche prescindendo dalla nozione primitiva di distanza tra due punti, e utilizzando invece la nozione derivata di diametro di un insieme.

Ciò suggerisce la possibilità di introdurre il concetto di spazio metrico attraverso una opportuna assiomatizzazione del concetto di diametro. La base di tale assiomatizzazione potrà essere costituita da un generico reticolo dotato di un elemento minimo (o più in particolare da un'algebra di BOOLE), anzichè dall'insieme dei sottoinsiemi di un certo insieme (di punti).

Tale teoria assiomatica, che conduce alla definizione di *reticolo metrico*, è sviluppata nel § 2.

Nel tentativo di verificare che la nozione di reticolo metrico fornisce lo strumento idoneo per una trattazione puramente reticolare della tradizionale geometria metrica, ci si è proposto successivamente, di introdurre nell'insieme dei *filtri massimali* di un reticolo metrico una struttura metrica di tipo tradizionale, da poter considerare come *indotta* dalla struttura metrica del reticolo stesso.

La struttura a cui si è così pervenuti risulta essere quella di uno spazio *pseudo-metrico*, sotto la condizione che ogni filtro massimale del reticolo contenga elementi di diametro arbitrariamente piccolo. Tale condizione, con cui si viene in sostanza a richiedere

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo n. 37 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1965-66.

che gli enti assunti come *punti* risultino *inestesi* (e non soltanto *indivisibili*), è in realtà inutilmente restrittiva, e potrebbe essere notevolmente indebolita, pur di assumere come insieme dei *punti* solo una parte dei filtri massimali del reticolo.

1. - Dato un insieme E , una *distanza* su E è una funzione d definita su $E \times E$ e assumente valori reali, soddisfacente alle seguenti condizioni:

$$\text{E. 1} \quad d(x, y) \geq 0$$

$$\text{E. 2} \quad d(x, y) = 0 \quad \text{è equivalente a} \quad x = y$$

$$\text{E. 3} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{E. 4} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Il sistema $\langle E, d \rangle$ si dice *spazio metrico* con sostegno E e *distanza* d .

Se d è funzione a valori reali, definita su $E \times E$, soddisfacente alle condizioni E. 1, E. 3, E. 4 e inoltre a

$$\text{E. 2'} \quad d(x, x) = 0,$$

il sistema $\langle E, d \rangle$ si dice *spazio pseudo-metrico*.

Dato uno spazio metrico $\langle E, d \rangle$ e un qualsiasi sottoinsieme A di E , porremo:

DEF. 1 - $\delta(A) = \sup \{ d(x, y) \mid x \in A, y \in A \}$ (¹), se A non è vuoto, $\delta(A) = 0$, se A è l'insieme vuoto.

$\delta(A)$, che può essere un numero reale non negativo oppure $+\infty$, verrà detto il *diametro* di A .

Indicato con $\mathcal{S}(E)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di E , con $\emptyset$ il sottoinsieme vuoto di E , con $A \cap B$, $A \cup B$ l'intersezione e la riunione degli insiemi A , B , il sistema $\langle \mathcal{S}(E), \emptyset, \cap, \cup \rangle$ costituisce un *reticolo dotato di minimo*.

$\mathcal{S}(E)$ risulta cioè *parzialmente ordinato* rispetto alla relazione $A \cap B = A$, che denoteremo, secondo l'uso, con $A \subset B$, e, rispetto all'ordinamento parziale così definito, $\emptyset$, $A \cap B$, $A \cup B$ sono rispettivamente il minimo elemento di $\mathcal{S}(E)$, il massimo elemento C di

(¹) Con $\{z \mid P(z)\}$ viene indicato l'insieme degli elementi z di un certo insieme ambiente (nel nostro caso l'insieme dei numeri reali), soddisfacenti alla condizione $P(z)$.

Dato un insieme non vuoto di numeri reali X , con $\sup X$, $\inf X$ si indicano rispettivamente *l'estremo superiore* e *l'estremo inferiore* (eventualmente infiniti) di X .

$\mathfrak{B}(E)$ tale che $C \subset A$, $C \subset B$, il minimo elemento C di $\mathfrak{B}(E)$ tale che $A \subset C$, $B \subset C$ ⁽²⁾.

La funzione δ definita su $\mathfrak{B}(E)$ soddisfa, per A, B comunque variabili in $\mathfrak{B}(E)$, alle seguenti condizioni:

1. 1 $\delta(A) \geq 0$
1. 2 $\delta(\emptyset) = 0$
1. 3 $A \subset B$ implica $\delta(A) \leq \delta(B)$
1. 4 $A \cap B \neq \emptyset$ implica $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.
1. 5 Supposto $A, B \neq \emptyset$, esiste $C \in \mathfrak{B}(E)$ tale che $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $\delta(C) \neq +\infty$.

Dati due qualunque sottoinsiemi non vuoti A, B di E , si dice *distanza* tra A e B il numero reale non negativo $d(A, B)$ così definito:

DEF. 2 - $d(A, B) = \inf \{ d(x, y) \mid x \in A, y \in B \}$.

La distanza $d(A, B)$ tra due insiemi può tuttavia essere caratterizzata senza ricorrere alla funzione $d(x, y)$ definita su $E \times E$, ma utilizzando esclusivamente la funzione $\delta(A)$ definita su $\mathfrak{B}(E)$. Si ha infatti:

1. 6 $d(A, B) = \inf \{ \delta(C) \mid A \cap C \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset \}$.

Per provare la precedente uguaglianza, è sufficiente dimostrare che, dato comunque $C \subset E$, tale che $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, esistono $x \in A$, $y \in B$ tali che $d(x, y) \leq \delta(C)$, e che viceversa, dati comunque $x \in A$, $y \in B$, esiste $C \subset E$ tale che $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $\delta(C) \leq d(x, y)$.

Sia dunque $C \subset E$ tale che $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, e si considerino comunque $x \in A \cap C$, $y \in B \cap C$. Si ha $x \in A$, $y \in B$, e inoltre (poichè $x \in C$, $y \in C$)

$$d(x, y) \leq \sup \{ d(x, y) \mid x \in C, y \in C \} = \delta(C).$$

Siano d'altronde dati comunque $x \in A$, $y \in B$, e si ponga $C = \{x, y\}$ (C è cioè l'insieme costituito dai due singoli elementi x, y). Si ha ovviamente $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $\delta(C) = d(x, y)$.

2. - Dato un generico reticolo dotato di minimo $\mathfrak{B} = \langle P, \emptyset, \cap, \cup \rangle$, diremo funzione *diametro* su $\mathfrak{B}$ una applicazione δ di P nell'insieme $R \cup \{+\infty\}$ (R sia l'insieme dei numeri reali),

(2) Si suppongono note le proprietà elementari di un reticolo.

soddisfacente, per x, y comunque variabili in P , alle condizioni:

$$P. 1 \quad \delta(x) \geq 0$$

$$P. 2 \quad \delta(\emptyset) = 0$$

$$P. 3 \quad x \subset y \text{ implica } \delta(x) \leq \delta(y)$$

$$P. 4 \quad x \cap y \neq \emptyset \text{ implica } \delta(x \cup y) \leq \delta(x) + \delta(y)$$

$$P. 5 \quad \text{Supposto } x, y \neq \emptyset, \text{ esiste } z \in P \text{ tale che}$$

$$x \cap z \neq \emptyset, y \cap z \neq \emptyset, \delta(z) \neq +\infty.$$

Il sistema $\langle P, \emptyset, \cap, \cup, \delta \rangle$ verrà detto *reticolo metrico* ⁽¹⁾.

Si consideri un reticolo metrico $\langle P, \emptyset, \cap, \cup, \delta \rangle$.

Diremo *distanza* tra due generici elementi x, y di P , diversi da $\emptyset$, il numero reale non negativo così definito:

$$\text{DEF. 1'} - d(x, y) = \inf \{ \delta(z) \mid x \cap z \neq \emptyset, y \cap z \neq \emptyset \}.$$

Si osservi che, in virtù di P. 5, d è effettivamente una funzione definita sull'intero insieme $(P - \{\emptyset\}) \times (P - \{\emptyset\})$ e a valori reali (finiti).

In ogni reticolo metrico valgono le seguenti proprietà:

$$2.1 \quad \text{Supposto } x \subset x', y \subset y', x \neq \emptyset, y \neq \emptyset, \text{ si ha } d(x', y') \leq d(x, y).$$

DIMOSTRAZIONE. - Basta osservare che, sotto le ipotesi del teorema, se $x \cap z \neq \emptyset, y \cap z \neq \emptyset$, si ha pure $x' \cap z \neq \emptyset, y' \cap z \neq \emptyset$, e applicare la DEF. 1'.

$$2.2 \quad \text{Supposto } x_1 \cup x_2 \neq \emptyset, x_2 \cap x_3 \neq \emptyset, \dots, x_{n-1} \cap x_n \neq \emptyset, \text{ si ha}$$

$$\delta(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_n) \leq \delta(x_1) + \delta(x_2) + \dots + \delta(x_n).$$

DIM. - Si dimostra per induzione rispetto all'indice n . Per $n = 2$, il teorema si identifica con l'assioma P. 4. Si supponga vero il teorema per $n = m - 1$. Si ha allora, sotto le ipotesi del teorema, con $n = m$,

$$\begin{aligned} \delta(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_m) &= \delta[(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_{m-1}) \cup x_m] \leq \\ &\leq \delta(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_{m-1}) + \delta(x_m) \leq \delta(x_1) + \delta(x_2) + \dots + \delta(x_m). \end{aligned}$$

⁽¹⁾ La definizione di *reticolo metrico* qui introdotta differisce sostanzialmente da quella fondata sul concetto di *valutazione*, riportata ad esempio in BIRKHOFF, G, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ, 1948 pp. 74-78.

Ricordiamo che una *valutazione* su un reticolo $\langle P, \cap, \cup \rangle$, è una funzione a valori reali $v(x)$ definita su P , soddisfacente alla condizione $v(x) + v(y) = v(x \cap y) + v(x \cup y)$.

La funzione $\delta(x)$ non è ovviamente in generale una valutazione.

2.3 Supposto $x, y \neq \emptyset$. si ha $\delta(x \cup y) \leq \delta(x) + d(x, y) + \delta(y)$.

DIM. - Sotto le ipotesi del teorema, la classe degli elementi $z \in P$ tali che $x \cap z \neq \emptyset$, $y \cap z \neq \emptyset$ non è vuota. Per ciascun elemento di tale classe si ha (teor. 2.2):

$\delta(x \cup y) \leq \delta(x \cup y \cup z) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(z)$. Applicando allora la DEF. 1', si ottiene $\delta(x \cup y) \leq \delta(x) + \delta(y) + d(x, y)$.

2.4 Supposto $x_1, x_2, \dots, x_n \neq \emptyset$, si ha

$\delta(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_n) \leq \delta(x_1) + \delta(x_2) + \dots + \delta(x_n) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$.

DIM. - Si dimostra per induzione rispetto all'indice n . Per $n = 2$, il teorema si identifica con il teor. 2.3.

Si supponga vero il teorema per $n = m-1$. Si ha allora, sotto le ipotesi del teorema, con $n = m$,

$$\begin{aligned} & \delta(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_m) \leq \\ & \leq \delta(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_{m-1}) + \delta(x_m) + d(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_{m-1}, x_m) \leq \\ & \leq \delta(x_1) + \delta(x_2) + \dots + \delta(x_{m-1}) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-2}, x_{m-1}) + \\ & \quad + \delta(x_m) + d(x_{m-1}, x_m), \end{aligned}$$

essendo, per il teor. 2.1, $d(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_{m-1}, x_m) \leq d(x_{m-1}, x_m)$.

2.5 Supposto $x, y, z \neq \emptyset$, si ha

$$d(x, z) \leq d(x, y) + \delta(y) + d(y, z).$$

DIM. - Siano u, v due qualsiasi elementi di P tali che

$$x \cap u \neq \emptyset, y \cap u \neq \emptyset, \quad y \cap v \neq \emptyset, z \cap v \neq \emptyset.$$

Applicando la DEF. 1' e il teor. 2.2, si ottiene

$d(x, z) \leq \delta(u \cup y \cup v) \leq \delta(u) + \delta(y) + \delta(v)$; da cui, ancora per la

DEF. 1', $d(x, z) \leq d(x, y) + \delta(y) + d(y, z)$.

2.6 Supposto $x_0, x_1, \dots, x_n \neq \emptyset$, si ha

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) & \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + \\ & \quad + \delta(x_1) + \dots + \delta(x_{n-1}). \end{aligned}$$

DIM. - Si dimostra per induzione rispetto all'indice n . Per $n = 2$, il teorema si identifica con il teor. 2.5.

Si supponga vero il teorema per $n = m-1$. Si ha allora, sotto le ipotesi del teorema, con $n = m$,

$$d(x_0, x_m) \leq d(x_0, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_m) + \delta(x_{m-1}) \leq \\ \leq d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{m-2}, x_{m-1}) + \delta(x_1) + \dots + \delta(x_{m-2}) + \\ + d(x_{m-1}, x_m) + \delta(x_{m-1}).$$

3. - Dato un reticolo dotato di minimo $\mathfrak{F} = \langle F, \emptyset, \cap, \cup \rangle$, un *filtro massimale* di $\mathfrak{F}$ è una qualunque sottoclasse non vuota di P, F , soddisfacenti alle seguenti quattro condizioni:

F. 1 $\emptyset \notin F$

F. 2 $x \in F, y \in F$ implicano $x \cap y \in F$

F. 3 $x \in F, x \subset y$ implicano $y \in F$

F. 4 F non è sottoinsieme proprio di alcun'altra sottoclasse di P soddisfacente a F.1-F.3.

Sia ora $\langle P, \emptyset, \cap, \cup, \delta \rangle$ un reticolo metrico soddisfacente alla seguente condizione:

(α) Prefissati comunque un numero reale positivo ε e un filtro massimale di $\mathfrak{F} = \langle P, \emptyset, \cap, \cup \rangle$, X , esiste un elemento $x \in X$, tale che $\delta(x) < \varepsilon$.

Indicato con Φ l'insieme dei filtri massimali di $\mathfrak{F}$, definiamo su $\Phi \times \Phi$ la seguente funzione:

DEF. 2' - $D(X, Y) = \sup |d(x, y)| \mid x \in X, y \in Y|$.

$D(X, Y)$ assume soltanto valori finiti. Presi infatti elementi $x' \in X, y' \in Y$ tali che $\delta(x') < +\infty, \delta(y') < +\infty$, e posto $z' = x' \cup y'$, si avrà $\delta(z') \leq \delta(x') + d(x', y') + \delta(y') < +\infty$. D'altra parte, per $x \in X, y \in Y$, si ha in ogni caso $x \cap z' \neq \emptyset, y \cap z' \neq \emptyset$ e perciò per la Def. 1', $d(x, y) \leq \delta(z')$. Ne risulta immediatamente $D(X, Y) \leq \delta(z') < +\infty$.

TEOREMA. 1 - D soddisfa alle condizioni E.1, E.3, E.4 del § 1.

DIM. - E.1 e E.3 sono ovviamente soddisfatte. E.4 si dimostra osservando che, in virtù del teor. 2.5 e delle definizioni introdotte, si ha, per $x \in X, y \in Y, z \in Z$ arbitrari, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) + \delta(y) \leq D(X, Y) + D(Y, Z) + \delta(y)$, donde, potendosi avere $\delta(y) < \varepsilon$, con ε positivo arbitrario,

$$d(x, z) \leq D(X, Y) + D(Y, Z), \\ D(X, Z) \leq D(X, Y) + D(Y, Z).$$

TEOREMA 2. - La relazione binaria definita su Φ da $D(X, Y) = 0$ è una relazione di equivalenza, cioè è riflessiva, simmetrica, transitiva. Inoltre $D(X, Y) = D(U, V) = 0$ implica $D(X, U) = D(Y, V)$.

DIM. i) $D(X, X) = 0$. Infatti, supposto $x \in X$, si ha anzitutto $d(x, x) = \inf |\delta(z)| \mid x \cap z \neq \emptyset = 0$, poichè, per (α), si può trovare $z \in X$ tale che $x \cap z \neq \emptyset, \delta(z) < \varepsilon$, con ε positivo piccolo a piacere.

D'altronde, per $x \in X$, $y \in X$, si ha $x \cap y \in X$, dunque, per la precedente osservazione e per il teor. 2.1,

$$d(x, y) \leq d(x \cap y, x \cap y) = 0. \quad \text{Ne segue}$$

$$D(X, X) = \sup \{d(x, y) \mid x \in X, y \in X\} = 0.$$

ii) $D(X, Y) = 0$ implica $D(Y, X) = 0$. Ciò è una conseguenza immediata del TEOR. 1 (E.3).

iii) $D(X, Y) = D(Y, Z) = 0$ implica $D(X, Z) = 0$. Anche questa è una conseguenza immediata del TEOR. 1 (E.4).

iv) Poichè per il Teor. I, $D(X, U) \leq D(X, Y) + D(Y, V) + D(U, V)$, supposto $D(X, Y) = D(U, V) = 0$, si ha $D(X, U) \leq D(Y, V)$.

Analogamente $D(Y, V) \leq D(X, U)$. Ciò prova che $D(X, Y) = D(U, V) = 0$ implica $D(X, U) = D(Y, V)$.

I precedenti teoremi provano che il sistema $\langle \Phi, D \rangle$ è uno spazio pseudo-metrico.

Si può poi ottenere uno spazio metrico nel seguente modo.

La relazione $D(X, Y) = 0$ induce una suddivisione dell'insieme Φ in classi di equivalenza. Si indichi con X' la classe di equivalenza contenente X , e con Φ' l'insieme di tutte le classi di equivalenza contenenti elementi di Φ .

Ovviamente l'applicazione D' di $\Phi' \times \Phi'$ nell'insieme dei numeri reali, definita da $D'(X', Y') = D(X, Y)$ è una distanza su Φ' . Il sistema $\langle \Phi', D' \rangle$ è cioè uno spazio metrico.

4. - Sia $\langle P, \emptyset, \cap, \cup, \delta \rangle$ un reticolo metrico soddisfacente alla condizione (α) del § precedente. Tenendo presente la DEF. 1 del § 1, poniamo, avendo indicato con Y, Z generici filtri massimali del reticolo:

DEF. 3. - $\Delta(x) = \sup \{D(Y, Z) \mid x \in Y, x \in Z\}$.

Si ha in generale $\Delta(x) \leq \delta(x)$. Infatti, posto $x \in Y, x \in Z, y \in Y, z \in Z$, si ha anzitutto $x \cap y \neq \emptyset, x \cap z \neq \emptyset$, quindi successivamente

$$d(y, z) = \inf \{d(x) \mid x \cap y \neq \emptyset, x \cap z \neq \emptyset\} \leq \delta(x)$$

$$D(Y, Z) = \sup \{d(y, z) \mid y \in Y, z \in Z\} \leq \delta(x)$$

$$\Delta(x) = \sup \{D(Y, Z) \mid x \in Y, x \in Z\} \leq \delta(x).$$

Non si ha tuttavia in generale $\Delta(x) = \delta(x)$, come si vede dal seguente semplice esempio.

Si consideri nel piano cartesiano la famiglia di cerchi aventi centro (a, b) con $a^2 + b^2 < 1$, e raggio minore o uguale a $1 - \sqrt{a^2 + b^2}$, e sia P la classe delle intersezioni e riunioni finite di tali cerchi

Detto γ il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1, si ponga, per ogni $z \in P$, con $z \neq \gamma$, $\delta(z)$ uguale al diametro euclideo di z (vedi DEF. 1), e si ponga $\delta(\gamma) = 3$.

Detto $\emptyset$ l'insieme vuoto, e $\cap, \cup$ le operazioni di intersezione e riunione tra insiemi, è immediato verificare che $\langle P, \emptyset, \cap, \cup, \delta \rangle$ è un reticolo metrico soddisfacente alla condizione (x) del § 3. Tuttavia $\delta(\gamma) \neq \Delta(\gamma) = 2$.