UMI

Recensioni.

* E. T. Copson, Asymptotic expansions, Cambridge University Press, 1965 (Dario Graffi)
* Pierre Humbert, Serge Colombo, Le calcul symbolique et ses applications à la Physique Mathématique, Gauthier-Villars, Paris, 1965 (Dario Graffi)
* L. Van der Waerden, Mathematische Statistik, Springer, Berkin, 1965 (Giulio Supino)
* Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vo. XVI, Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering, American Mathematical Society, 1964 (Luigi Castolodi)
* Dietrich Morgenstern, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Springer-Verlag, 1964 (Bruno de Finetti)
* L. Fox, An Introduction to Numerical Linear Algebra, Clarendon Univ. Press, Oxford, 1964 ((F. G. Tricomi))
* L. E. El'sgol'c, Qualitative Methods in Mathematical Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, 1964 (F. G. Tricomi)
* L. D. Kovach, Computer-oriented mathematics (an introduction to numerical methods), Holden-Day Inc., San Francisco London Amsterdam, 1964 (G. Capriz)
* Rafael Artzy, Linear Geometry, Addison Wesley Co., Reading, 1965 (S. Ciampa)
* Làslò Rédei, Begründung der Euclidischen und Nichteuclidischen Geometrien nach F. Klein, Akademiai Kiadò, Budapest, 1965 (E. Bompiani)
* Israel Grossmann, Groups and their graphs, Random House, New York, 1964 (C. Marchionna Tibiletti)
* D. E. Rutheford, Classical Mechanics, Oliver and Boyd, Edinburgh London, 1964 (L. Caprioli)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.1, p. 90–101.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_1_90_0>

RECENSIONI

E. T. Copson, *Asymptotic expansions*, Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, N. 55, Cambridge University Press, 1965, pagg. 120.

Il calcolo numerico d'integrali, anche dipendenti da un parametro, non offre difficoltà in questi tempi di macchine elettroniche. Però, a mio avviso, non diventano inutili le espressioni asintotiche che si possono ottenere per alcuni integrali dipendenti da un parametro. Infatti, a parte le difficoltà di disporre di una macchina elettronica, le proprietà di un integrale (specie se rappresenta un fenomeno fisico) sono certamente rese più evidenti da una sua espressione asintotica. Perciò assai utile mi sembra il volumetto del Copson.

In esso, dopo una introduzione sulle proprietà delle serie asintotiche, si espongono i vari metodi che permettono di ottenere formule asintotiche per gli integrali (metodo dell'integrazione per parti, della fase stazionaria, di Laplace, della « steepest descents », ecc.). I diversi metodi sono poi applicati agli integrali che rappresentano le funzioni più importanti nella pratica come funzione Γ, funzioni di Bessel oscillanti e non oscillanti, polinomi di Legendre, integrali di Airy. L'ultimo capitolo contiene alcune notizie sulle espressioni asintotiche uniformi.

Ai metodi esposti l'Autore premette spesso alcune considerazioni intuitive che permettono di comprendere le linee essenziali dei metodi stessi. Perciò la trattazione risulta sempre chiara ed efficace.

Molto buona la presentazione tipografica.

Dario Graffi

Pierre Humbert et Serge Colombo, *Le calcul symbolique et ses applications à la Physique Mathématique*, Memorial des sciences mathématiques, fascicule CLVIII Gauthier-Villars, Paris, 1965.

È questa la seconda edizione, curata da Serge Colombo, di un Memoriale apparso nel 1947.

Il fascicolo s'inizia con una introduzione a carattere storico in cui vengono definite, fra l'altro, oltre alla trasformazione di Laplace, anche le altre trasformazioni funzionali lineari (Mellin, Weierstrass, Hankel, Stieltjes, Kontorovich-Lebedev) di notevole interesse per le applicazioni. Segue un capitolo dedicato alla deduzione delle regole del calcolo operazionale o simbolico; deduzione ottenuta mediante la trasformazione di Carson cioè, in sostanza, mediante la trasformazione di Laplace che, com'è noto, vale quella di Carson divisa per il parametro *p*. Il capitolo costituisce un vero progresso sull'edizione precedente perchè la trattazione è molto più ampia e si ottengono anche importanti e utili relazioni di solito omesse negli altri testi di calcolo simbolico.

Il secondo capitolo è veramente interessante: in esso, mediante il calcolo operazionale vengono ricavate rapidamente proprietà delle funzioni speciali (Bessel, Kelvin, integrali di Fresnel e Gilbert, polinomi di Laguerre, ecc.) la cui dimostrazione diretta, è di solito, assai penosa. Nell'ultimo capitolo si espongono applicazioni del calcolo simbolico alle equazioni differenziali e in particolare a quelle che reggono i circuiti elettrici con costanti concentrate o distribuite. Il fascicolo termina con due tabelle: la prima contiene le regole del calcolo operazionale, la seconda un elenco delle trasformate di alcune importanti funzioni.

Com'è detto nella prefazione, scopo degli Autori era di giustificare al matematico l'interesse suscitato presso gli elettrotecnici per un metodo di calcolo classico e basato sulla trasformazione funzionale di Laplace. Mi sembra che tale scopo sia stato pienamente raggiunto.

DARIO GRAFFI

L. VAN DER WAERDEN, *Mathematische Statistik*, 2ª ediz., pp. X+360, Berlin, Springer, 1965.

La seconda edizione di questo notevole volume differisce dalla prima edizione soltanto per una figura che è stata corretta (pag. 223). È tuttavia opportuno richiamare il piano generale del libro perchè la prima edizione non è stata recensita sul Bollettino.

L'opera è divisa in 14 Capitoli. Il primo di essi espone i fondamenti puramente matematici della teoria; anche il calcolo delle propabibilità è esposto partendo dal punto di vista astratto di Kolmogoroff e ricavando per questa via le proprietà fondamentali.

Il secondo capitolo (probabilità e frequenza) considera lo sviluppo binomiale e successivamente enuncia la proposizione seguente « Eventi che hanno probabilità molto piccole si usano considerare come quasi impossibili; non si tiene conto del loro verificarsi per la realizzazione di condizioni che pure teoricamente appaiono possibili ». Questa proposizione sostituisce il postulato empirico del caso ed è subito applicata nel paragrafo successivo per affermare come eventi che differiscono dalla probabilità di più che tre volte lo scarto quadratico medio sono da considerarsi irrealizzabili. Il paragrafo che segue si sofferma sui limiti con i quali possono essere apprezzate le probabilità sconosciute (dedotte cioè dalla statistica). Il capitolo termina considerando la frequenza degli eventi rari.

Dopo che nel Cap. III l'A. ha esposto alcuni complementi matematici, sono esaminate nel capitolo IV le determinazioni empiriche delle funzioni di ripartizione, le medie e gli scarti quadratici. Il Cap. V studia l'integrale di Fourier e i teoremi sui valori limite, il Cap. VI la teoria degli errori di Gauss e il metodo Student; il Cap. VII il metodo dei minimi quadrati, il Cap. VIII la valutazione delle costanti incognite, il Cap. IX la valutazione delle frequenze osservate.

Il Cap. X considera alcune applicazioni alla biologia, il Cap. XI studia la conferma delle ipotesi con le prove, il Cap. XII le prove di ordinamento mentre il Cap. XIII si riferisce alla correlazione. Il Cap. XIV contiene esclusivamente le tavole.

Il libro segue un indirizzo più astratto di quello dei trattati che lo hanno preceduto; è tuttavia scritto in un tedesco molto semplice e chiaro sicchè il lettore è messo al corrente con i più moderni procedimenti attraverso una esposizione veramente felice.

GIULIO SUPINO

Proceedings of Symposia in Applied Mathematics - Volume XVI - STOCHASTIC PROCESSES IN MATHEMATICAL PHYSICS AND ENGINEERING. American Mathematical Society, pp. VIII, 318 (1964).

La comparsa di un volume della Am. Math. Society — il decimosesto dei Proceedings of Symposia of Applied Mathematics — attorno a processi stocastici in Fisica matematica e in Ingegneria potrebbe suscitare nel Lettore di orientamento fisico matematico classico o politecnico la prospettiva di una lettura attorno ad argomenti tradizionali, attaccati con tecniche moderne aventi la loro radice in nozioni e in vedute probabilistiche. È bene subito dire che tale prospettiva non risponde allo scopo del volume nè agli intenti degli Autori; che anzi si tratta — come è nella tradizione dei Proceed. della Am. Math. Society, e come risulterà dall'elenco dei titoli e dalla pur breve analisi che vi farà seguito — di una raccolta di Monografie di Alta Analisi Applicata, scritte, quali per fornire contributi originali alla teoria, quali per presentare immagini rapide e aggiornate sul vasto dominio concettuale ed applicativo conquistato in brevi anni dall'Analisi stocastica. Monografie — particolarmente quest'ultime — scritte in forma di esposizioni sintetiche ma sufficientemente esplicative, rivolte — ci sembra di capire — ad un pubblico giovane, composto più di Fisici di vocazione matematica e di Matematici sensibili a tutti i problemi della Scienza, che non di Fisici e di Analisti di scuola tradizionale. Scritti rivolti, insomma, da Autori fortemente specializzati a un pubblico di Lettori particolarmente versatili e ricettivi.

Non si vuol dire con ciò che trattisi di un libro scoraggiante. Nasce anzi dallo studio attento di queste pagine la convinzione sicura che una tale ricchezza di concetti nuovi, di nuovi algoritmi, di strade non mai prima percorse dal pensiero, sarà certamente fonte di vive soddisfazioni per i giovani che vi si avventureranno armati dell'ardimento dell'ingegno. Nulla di più esaltante, a questo proposito, delle elevate parole conclusive della Introduzione di R. BELLMAN, Redattore e Autore di una delle Memorie del volume: «Looking over the papers in this volume, we see many new, fascinating, and difficult classes of problems, ideal areas for the yong analyst to test his talents, develop his techniques, and plant his flag».

Passiamo ormai a una breve rassegna degli argomenti.

Definito un processo stocastico come distribuzione congiunta di probabilità per la successione dei valori che un'unica variabile aleatoria dipendente dal tempo assume in istanti diversi (G. ADOMIAN - *Stochastic Green's function*), è noto che un tale processo è individuato dalla conoscenza delle sue *autocorrelazioni* di tutti gli ordini. La sola conoscenza delle autocorrelazioni di ordine due o, quanto meno, della corrispondente funzione (mediata) di *correlazione* o della equivalente relativa *densità spettrale* porge invece una particolare « *misura* » del processo. Incidentalmente, una consueta variabile aleatoria si identifica con un processo stocastico a tempi tutti coincidenti.

Posto che un *operatore stocastico* H (matrice con elementi stocastici) trasformi un processo d'entrata (*input*) $x(t)$ in uno di uscita (*output*) $y(t)$, lo studio del legame tra $x(t)$ e $y(t)$ può semplificarsi se trasferito al livello delle corrispondenti misure. Viene dimostrata l'esistenza e costruita l'espressione di una legge lineare di trasformazione, operante attraverso un conveniente nucleo dipendente da H, tra le densità spettrali di x e di y. Tale nucleo, analogo alla funzione di GREEN dei problemi classici deterministici, prende il nome di *funzione stocastica* di GREEN. La teoria è applicata con particolare penetrazione al problema della risoluzione dell'equazione differenziale a coefficienti stocastici

$$(1) \qquad Ly = x \, ; \; L \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \, ,$$

cioè all'inversione dell'operatore differenziale stocastico L.

Più variamente, *equazioni stocastiche* sono considerate da A. T. BHARUCHA - REID - *On the theory of random equations*. In particolare, equazioni algebriche (2) $\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \ldots + \xi_n x^n = 0$ con coefficienti dotati di leggi di distribuzione di uno dei seguenti tipi: *a*) distribuzione normale, *b*) distribuzione rettangolare in $(-1,1)$, *c*) distribuzione a due valori, $p(-1)=p(+1)=1/2$. Sono riferiti i seguenti suggestivi teoremi di LITTLEWOOD e OFFORD, validi in uno qualsiasi dei casi elencati: 1) Esiste un intero n_0 tale che, per $n > n_0$, la probabilità che l'equazione (2) abbia più di 25 $(\log n)^2$ radici reali non supera $(12 \log n)/_n$; 2) La probabilità che l'equazione (2) abbia meno di $\alpha[{}^{\log n}/_{(\log \log n)^2}]$ radici reali è minore di $A/_{\log n}$, con A ed α costanti universali.

Un altro teorema, di ERDOS e OFFORD, è il seguente: si consideri l'equazione (3) $1 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \ldots + \varepsilon_n x^n = 0$, in cui $\varepsilon_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ è suscettibile dei valori $+1$ e -1, ciascuno con probabilità 1/2. In queste condizioni, presa a caso una delle equazioni (3), il numero delle sue radici reali è $\frac{2}{\pi} \log n + o[(\log n)^{2/3} \log \log n]$ con probabilità non minore di $1 - o[(\log \log n)^{-1/}]$.

Molti altri interessanti risultati sono presentati, che la ristrettezza di spazio non ci consente di riferire. Accenniamo solo agli argomenti dei restanti paragrafi: *equazioni stocastiche alle differenze* (processi stocastici autoregressivi, di interesse econometrico); *equazioni differenziali stocastiche alle derivate ordinarie* e alle *derivate parziali; equazione integrale* di ITO, nonchè soluzioni stocastiche di equazioni integrali classiche (a nucleo non aleatorio)

Di operatori non aleatori, benchè applicabili a processi stocastici e originatisi da problemi di meccanica statistica della turbolenza (operatori di *Reynolds*) nonchè di *operatori di media* o *di valor medio condizionale* (*averaging sperators*) tratta G. C. ROTA in *Reynolds Operators*, ponendo il problema di riconoscere se e come possa un operatore essere a un tempo di REYNOLDS e di media.

Dalle definizioni implicite di operatore di REYNOLDS

$$(4) \qquad R(f \cdot Rg + g \cdot Rf) = Rf \cdot Rg + R(Rf \cdot Rg)$$

e, rispettivamente, di operatore di media

$$(5) \qquad A(f \cdot Ag) = Af \cdot Ag$$

risulta da un operatore di media per cui sia $A1 = 1$ è operatore di REYNOLDS. Ma la proprietà inversa non è vera, esistendo operatori di REYNOLDS soddisfacenti la condizione $R1 = 1$ che non sono di media. Restano dunque da caratterizzare quegli operatori di REYNOLDS che godono della proprietà indicata e non sono di media. Adempiono a questo compito i due seguenti teoremi:

1) Un operatore di REYNOLDS in $L_\infty(S, \Sigma, m)$ è un operatore di media se e solo se il suo rango è chiuso nella L_1-topologia;

2) Se R è un operatore di REYNOLDS in $L\infty$, tale che $R1 = 1$ e per cui $\int |f|^2 dm \geq \int |Rf|^2 dm$ per ogni f in L_∞, allora R si può rappresentare nella forma $Rf = \int_0^\infty e^{-t} V^t A f dt$, dove A è un ben determinato operatore di media positivo e dove V^t è una ben determinata trasformazione conservante la misura, definita per $t \geqq 0$ in L_∞.

Occupano la parte centrale del volume tre memorie di argomento fisico [V. TWERSKY - *Random media of discrete scatterers;* W. C. HOFFMAN - *Wave propagation in a general random continous medium;* J. B. KELLER - *Stochastic equations and wave propagation in random media*].

Il lavoro di TWERSKY riguarda il problema dello scattering di onde piane di funzione d'onda Ψ che investono una distribuzione spaziale aleatoria di centri scatteranti puntiformi (per esempio: scattering molecolare della luce). La trattazione volge principalmente attorno al confronto di due tecniche per la ricerca dei valori medi $\langle\Psi\rangle$ e $\langle|\Psi|^2\rangle$ dell'onda in uscita, caratterizzati rispettivamente dall'operare su una espressione « compatta » o su una espressione « espansa » di Ψ. In entrambi i casi, la sostituzione dei valori medi alla effet tiva espressione di Ψ semplifica le equazioni di base (equazioni funzionali nel metodo compatto; sviluppi in serie in quello espanso). La teoria è illustrata su esempi in ciascuno dei quali *una* delle ipotesi fondamentali si presenta in forma porticolarmente semplice (gas rarefatto; mezzo scatterante sottile; proprietà di « scattering in avanti » (forward-tipe-scatterers)) allo scopo di riconoscere le corrispondenti ripercussioni sulle due tecniche impiegate.

Il lavoro di HOFFMAN riguarda principalmente il formalismo matematico e il contenuto stocastico della teoria della propagazione di onde acustiche o elettromagnetiche in un continuo turbolento, e vuole essere un contributo di precisazione — particolarmente sotto l'aspetto concettuale — in campi che interessano anche l'ingegneria (turbolenza in idrodinamica). L'equazione base è quella classica, ridotta, delle onde; i metodi risolutivi poggiano sulla rappresentazione spettrale della soluzione stocastica. Se l'indice di rifrazione del mezzo presenta soltanto scostamenti esigui dal suo valore di media, è applicabile il metodo delle perturbazioni (trasformazione in equazione integrale e prima approssimazione di BORN). È anche possibile trasformare l'equazione delle onde in una equazione spaziale di RICCATI mediante una trasformazione di RYTOV; nonchè, nel caso limite dell'ottica geometrica, usufruire della tecnica dell'equazione iconale per il cammino ottico. Un ulteriore procedimento consiste nel trasformare l'equazione delle onde in una equazione di trasporto in relazione a una statistica dei fotoni.

Ancora della propagazione di onde in mezzi stocastici si occupa J. B. KELLER nella terza memoria citata. Precisato in qual senso l'aleatorietà del mezzo si traduca in termini di equazioni stocastiche, si considera separatamente il caso in cui le fluttuazioni aleatorie del mezzo sono piccole e quello in cui ciò non avviene. Corrispondentemente la soluzione delle equazioni stocastiche può conseguirsi attraverso metodi perturbativi — qui sviluppati per la determinazione del valor medio della soluzione —, o con metodi più penetranti. Quando, infatti, le fluttuazioni del mezzo cessano di essere irrilevanti, il metodo delle perturbazioni si dimostra insoddisfacente e va sostituito con procedimenti idonei a fornire tutti i successivi momenti della soluzione (sistemi infiniti di equazioni gerarchiche). Un siffatto sistema può essere sostituito, come notò per la prima volta BOGOLIUBOV nel 1947, da una unica equazione differenziale per il funzionale generatore dei momenti della soluzione, implicante i coefficienti stocastici dell'equazione data. Ma può anche essere « troncato » aggiungendo convenienti ipotesi che consentano di esprimere tutti i momenti mediante quelli di ordine inferiore a un dato (« dishonest » method). Anche questo lavoro si chiude sul tema del trasferimento radiativo o teoria del trasporto, colla dimostrazione che tale impostazione del problema è deducibile, sotto particolari ipotesi, da una equazione stocastica ridotta.

L'articolo di R. BELLMAN: *Stochastic transformations and functional equations* è dedicato ad alcuni problemi che nascono dallo studio di equazioni funzionali tra variabili aleatorie del tipo $x_{n+1} = g(x_n \cdot r_n)$. Un primo di siffatti problemi è quello relativo al caso in cui è $g(x)$ della forma $a_1x + a_2x^2 + \ldots$; e consiste nella ricerca di una funzione $f(x)$ *linearizzante,* nel senso che risulti $f[g(x)] = a_2f(x)$. Il problema è risolto sia nel caso deterministico (a_i non aleatorie), sia nel caso stocastico (a_i aleatorie con assegnata distribuzione congiunta di probabilità: $G(a_1, a_2, a_3, \ldots)$. In quest'ultima circostanza si riconosce che $f(x)$, ove esista, soddisfa l'equazione integrale di ABEL-SCHRODER $f(x) = \frac{1}{e_1}\int f[g(x, a)]dG$, $e_1 = \int a_1 dG$.

Un secondo problema, riguardante prodotti di matrici stocastiche, nasce dal considerare equazioni vettoriali alle differenze $x_{n+1} = R_n x_n$ ($x_n = R_n R_{n-1} \ldots R\, c$; $x_0 = c$); un ultimo, dalla ricerca di soluzioni dell'equazione stocastica $\frac{du}{dt} = g[u, r(t)]$, per cui è fornito un procedimento risolutivo di approssimazione poggiante su una tecnica di quasilinearizzazione.

Nella Nota: *The Aplication of stochastic Approximation to optimization of random circuits,* K. B. GRAY applica il procedimento di approssimazione convergente di KIEFER-WOLFOWITZ al problema di determinare distribuzioni di variabili aleatorie interpretabili come elementi di un circuito elettrico, allo scopo di rendere massimo un loro conveniente funzionale (problema di ottimizzazione). Un esempio elementare di un tal genere di problemi è il seguente: Posto che $Y_t(\omega)$, con determinazione iniziale aleatoria $Y_0(\omega)$, sia l'uscita di un circuito elettrico, soddisfacente l'equazione $R\frac{dY_t(\omega)}{dt} + \frac{1}{C}Y_t(\omega) = 0$, determinare la distribuzione della resistenza R e della capacitanza C in modo che $Y_t(\omega)$ si scosti *il meno possibile,* in senso precisato, sull'intervallo (O, T), dalla determinazione $Y_t = e^{-t/2T}$.

Un articolo attorno a passeggiate a caso sopra reticoli: *Random Walks ou lattices* è dovuto a E. W. MOUTROLL.

Molti risultati su questo argomento vi si trovano riferiti, e in gran parte stabiliti col metodo della funzione generatrice. È questa la funzione $U(z, l) = \sum_{t=0}^{\infty} z^t P_t(l)$ formata colle probabilità $P_t(l)$ che un punto partito, all'istante $t = 0$, dall'origine del reticolo, si trovi dopo t « passi » (all'istante t) nel punto reticolare di raggio vettore l. Oltre a un approfondito esame della funzione generatrice spiccano nel lavoro di MOUTROLL il problema dei *tempi di primo passaggio* per un punto l; quello della probabilità di ritorno all'origine (uguale ad 1 per reticoli ad una e a due dimensioni, minore di 1 per reticoli a più dimensioni (PÒLYA)), nonchè il teorema secondo cui, su un reticolo finito pluridimensionale chiuso, il numero medio di passi richiesti per il ritorno all'origine è uguale al numero complessivo dei punti reticolari. Altri argomenti notevoli: il numero dei punti reticolari visitati dopo n passi, e il problema — di notevole importanza applicativa nella teoria dello stato solido — della passeggiata a caso su reticoli scarsamente lacunosi.

La Nota: *On statistical spectral Analysis* di E. PARZEN presenta gli aspetti più moderni e avanzati del classico problema della ricerca di periodicità in serie temporali di durata finita (Analisi periodale). Viene messo in luce il legame esistente fra l'antico periodogramma di SCHUSTER (1897): $I_T(\omega) = \frac{2}{T}\left|\sum_{t=1}^{T} x(t)e^{i\omega t}\right|^2$ e la funzione di *covarianza di campione* $R_T(v) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-v} x(t)x(t+v)$; $v = 1, 2, \ldots, T-1$; $R_T(v) = 0$ per $v \geq T$, $R_T(-v) = R_T(v)$, per $v<0$, riconoscendosi essenzialmente in quest'ultima la trasformata di FOURIER del primo.

La nota profitta della teoria della funzione di covarianza per la definizione di *spettro*, di *densità spettrale*, di *salti spettrali* e delle relative stime. Sono introdotte altresì le nozioni di *peso* e di *finestra spettrale* ed è istituito un confronto tra finestre spettrali attraverso le rispettive funzioni generatrici.

Nella Nota: *Stability in signal detection problems*, L. W. ROOT esamina il problema delle stabilità della detezione di segnali. La detezione di un segnale comporta essenzialmente la separazione di una funzione di uscita da un apparato di ricezione in una parte $s(t, \alpha)$ (*segnale*) e in *disturbo* $x(t)$ (rumore o noise): $y(t) = s(t, \alpha) + x(t)$. Più precisamente, ritenuta nota la funzione di segnale e incognito (ma deterministico) o aleatorio il parametro α, nonchè funzione campione in un processo stocastico il disturbo $x(t)$, si tratta di progettare un funzionale $f[y]$ che consenta — nel modo migliore — di vagliare ipotesi su valori di α, o, rispettivamente, di fornire una stima. Generalmente, tale funzione dipende da ipotesi sulla natura stocastica di $x(t)$ ed è desiderabile — definizione del « modo migliore » — che i vagli e le stime effettuate non risultino gravemente invalidati nel caso che $x(t)$ non possieda il comportamento ipotizzato (problema di stabilità nella detezione).

Sono forniti criteri di stabilità nel caso che il disturbo sia Gaussiano e in casi più generali.

Nella Nota: *The construction of a class of stationary* MARKOFF *processes*, E. WONG considera l'equazione di FOKKER-PLANCK (6) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(x)p] - \frac{\partial}{\partial x}[A(x)p] = \frac{\partial p}{\partial t}$ per funzioni $p(x, t)$ definite sull'intervallo (x_1, x_2) e sottoposte alle condizioni agli estremi $\frac{\partial}{\partial x}[B(x)p] - A(x)p = 0$ in x_1 e in x_2. L'Autore dimostra che se $A(x)$ e $B(x)$ sono rispettivamente polinomi della forma $A(x) = ax + b$, $B(x) = cx^2 + dx + e$, e se $W(x)$ è densità di probabilità soluzione dell'equazione di PEARSON $\frac{dW}{dx} = \frac{A(x)}{B(x)} W(x)$, allora esiste — ed è costruita — una soluzione stocastica di (6) per cui è $\lim_{t \to \infty} p(x|x_0, t) = W(x)$.

Diverse scelte di $A(x)$ e $B(x)$ portano a processi diffusivi di noto interesse applicativo — Moto Browniano; accrescimento di popolazioni — e ad altri che compaiono qui per la prima volta.

Chiudono il volume tre note rispettivamente di D. BLACKWEL, *Probability bounds via dynamic Programming*, nella quale si applicano metodi di programmazione dinamica alla determinazione di certi limiti superiori di probabilità; di C. DERMAN - *Markovian sequential decision processes*, dove si considerano processi stocastici a tempo discreto, la cui evoluzione è influenzata da controlli con carattere di decisioni; e di J. M. RICHARDSON - *The application of truncated hierarchy techniques in the solution of a stochastic linear differential equation*, in cui vengono presentati tre metodi di troncamento per la risoluzione di equazioni differenziali stocastiche.

Viene particolarmente considerata l'equazione

$$\frac{dx^2}{dt^2} + (1 + u)x = 0, \quad x(0) = c_1, \quad \frac{dx}{dl}(0) = c_2 \tag{7}$$

con c_1, c_2 costanti non aleatorie ed u processo stocastico.

Le gerarchie considerate consistono nel moltiplicare (7) successivamente per $u(t_1)$, $u(t_1) \cdot u(t_2)$, etc. e nel trattare poi, o la successione di relazioni ottenute senz'altro, o nel sostituire alle relazioni stesse quelle che se ne ricavano per operazioni di media.

LUIGI CASTOLDI

DIETRICH MORGENSTERN, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*, Springer-Verlag, 1964 (Band 124 delle Grundl. d. math. Wiss.), pp. XII-224.

Il compito che l'A. si è prefisso consisteva nel condensare in breve spazio le principali nozioni del calcolo delle probabilità (90 pagine) e della statistica matematica (116 pagine), con una selezione ispirata alle esigenze di quest'ultima (intesa soprattutto come teoria della stima di parametri e dei test).

La scelta degli argomenti da includere come indispensabile supporto per la comprensione e la trattazione delle applicazioni che interessavano, la scelta dell'ordinamento più adatto per introdurli, la scelta dei metodi e del grado di approfondimento e sviluppo con cui presentarli, sono state oggetto di attenta considerazione portando spesso ad utili accorgimenti e semplificazioni. A parte ciò, la materia e il modo d'impostazione sono sostanzialmente quelli consueti nella trattazione (in certo senso « classica ») della materia.

BRUNO DE FINETTI

L. FOX, *An Introduction to Numerical Linear Algebra*, Oxford, Clarendon Univ. Press, 1964; pp. XII+295; 50 s.

Questo libro è degno di nota anzitutto pel fatto che è il secondo volume di una nuova collezione (diretta dall'A. e da E. T. Goodwin) di monografie di sola Analisi numerica, chè — come dice l'A. nella prefazione — è ormai finito il tempo in cui era possibile trattare, non troppo superficialmente, tutti i rami di questa disciplina in una sola opera di ragionevole mole. Ora occorre invece considerarli singolarmente, come dimostra il presente volume, che ha richiesto circa 300 pagine per trattare — in modo non certo esau riente ma adeguato — i problemi numerici dell'Algebra lineare e cioè: risoluzione di sistemi di equazioni lineari, inversione di matrici, ricerca dei loro autovalori (qui detti « radici latenti »), ecc.

L'A. non scende in dettagli, e fa bene, sulla vera e propria programma zione degli algoritmi di cui si serve, uso di linguaggi algoritmici e simili, perchè queste cose, unitamente alla teoria delle macchine calcolatrici, costituiscono una disciplina a parte. Tuttavia ha sempre presente il fatto che, oggi, tutti i calcoli un po' impegnativi — e, in ispecie, quelli considerati in questo libro — vengono quasi esclusivamente eseguiti con l'aiuto di calcolatori elettronici a programma. S'interessa invece molto della discussione degli errori, vuoi d'arrotondamento, vuoi « di troncamento » (cioè originati dall'uso di metodi approssimati), vuoi causati dall'imprecisione dei dati di partenza, chè — come giustamente osserva — « sarebbe stupido di riportare più di tre decimali » nel dare il risultato di un calcolo affetto da un possibile errore di $\pm$ 0,0035.

Il libro è, del resto, ricco di osservazioni giudiziose come, ad esempio, quella che « il direttore di un Centro di calcolo deve anche tener conto del fatto che gli ingegneri e gli altri scienziati che hanno da risolvere problemi numerici hanno — come io ho potuto sperimentare — una certa antipatia e perfino un certo timore per parole quali « spazio », « caratteristica » e perfino « matrice »; che, a loro giudizio, sono strane e non pratiche astrazioni matematiche ». Coerentemente l'A. si preoccupa sempre di rendere ragione del perchè s'introducono certi concetti e, in ispecie, quello di matrice, che si rivela poi tanto utile anche dal punto di vista pratico.

Dopo quanto si è detto è quasi superfluo aggiungere che il libro in esame può essere vivamente raccomandato a chiunque debba occuparsi dei problemi in esso trattati.

F. G. TRICOMI

L. E. EL'SGOL'C (Л. Э. Эльсгольц), *Qualitative Methods in Mathematical Analysis*, - Providence, R.I. - Amer. Math. Soc., 1964; pp. VIII+250.

Considerato lo sviluppo che va assumendo l'impiego dei grandi calcolatori elettronici, si può azzardare la profezia che, nel prossimo avvenire, la matematica non fine a se stessa si svilupperà soprattutto in due direzioni: procedimenti di calcolo numerico e metodi per lo studio qualitativo dei varî problemi.

Mentre il libro di cui si è detto più sopra si riferisce al primo di questi due indirizzi, gli argomenti considerati nel volume attuale (che è una traduzione inglese di un libro pubblicato in Russia nel 1955) rientrano quasi esclusivamente nel secondo, che non è solo — come sembra ritenere l'A. — un surrogato di quelle soluzioni esplicite, che tanto raramente si riesce a dare, ma un corpo autonomo di dottrina Tant'è vero che non sono del tutto eccezionali quei casi in cui — pur conoscendosi la soluzione esplicita di un certo problema — è preferibile far ricorso a metodi qualitativi per discuterne l'andamento nel modo più semplice possibile.

Lo scopo principale dell'opera in esame è d'introdurre il lettore nell'uso dei principali metodi, specie topologici, d'Analisi qualitativa, applicandoli sia a questioni ormai classiche — quali, ad esempio, lo studio dell'andamento degli integrali di un sistema differenziale intorno ai loro punti singolari, o la ricerca delle eventuali soluzioni periodiche — sia a questioni più recenti e, in parte, non ancora definitivamente sistemate. Fra queste ultime predominano le ricerche della scuola russa originate dallo studio del controllo dei sistemi meccanici, fra cui quelle — non ancora molto conosciute in Occidente — sulle equazioni differenziali e i problemi variazionali con « argomenti deviati ». Cioè problemi in cui, ad esempio, la funzione incognita $f(t)$ figura anche come $f(t-\tau)$, essendo τ una quantità (per lo più positiva) o costante o funzione anch'essa di t. In tali casi l'A. non si limita al solo studio qualitativo del problema, ma, trattandosi di cose ancora molto recenti, ne considera anche gli altri aspetti, non esclusa la ricerca di metodi approssimati di soluzione.

Fra le altre questioni trattate, occupa un posto relativamente importante lo studio dei punti in cui una data funzione f di una o più variabili è *stazionaria* (cioè è $df=0$), punti il cui minimo numero dipende dài caratteri topologici del dominio in cui si considera la funzione.

Non mancano, ovviamente, dei teoremi di *punti fissi*, del genere di quello celebre del Brouwer e alcune loro applicazioni, fra cui quella al teorema di esistenza di Peano (non però così designato) per le equazioni differenziali continue. E nemmeno manca lo studio di varie questioni di *stabilità* a cui, da Ljapunov in poi, la scuola russa ha apportato ben noti contributi.

Finalmente desidero richiamare l'attenzione sul fatto che l'A. non trascura — come di solito avviene in altri trattati del genere — la discussione di quelle che egli chiama: *equazioni differenziali con piccoli coefficienti.*

Cioè, riferendosi ad un caso tipico dei più semplici, lo studio dell'andamento degli integrali dell'equazione differenziale.

$$\mu y' = f(x, y)$$

quando si fa tendere a zero il parametro μ. Questa discussione conduce invece a risultati interessanti, non sempre facilmente prevedibili *a priori*, e principalmente quello che le soluzioni compiono oscillazioni rapidissime intorno alla curva $f(x, y) = 0$.

Nel complesso si tratta di un libro interessante che, soprattutto, fornisce utili informazioni su recenti ricerche della scuola russa su vari problemi analitici sorti dalla teoria del controllo.

F. G. TRICOMI

L. D. KOVACH, *Computer-oriented Mathematics* (*an introduction to numerical methods*). Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdam, 1964; pp. X+98. Brochure \$ 2.95, rilegato \$ 3.95.

Si tratta di un volumetto scritto con un certo brio ed un pò di disinvoltura; è dedicato a studenti al livello del nostro liceo, per invogliarli a studiare la « matematica dei calcolatori ». Il tono è quello del discorso informativo forzatamente facile con numerosi esempi: ne risulta un libro di agile lettura. Ma viene da dubitare che si attraggono così gli studenti migliori; semmai si finirà coll'incoraggiare i mediocri. I titoli dei capitoli sono indicativi del contenuto e dello stile: 1) Caratteristiche dei calcolatori; 2) Le diverse basi di numerazione; 3) Incominciando coll'indovinare; 4) Dell'interpolazione, ossia del colmare lacune; 5) Approssimazioni, facili e sofisticate; 6) Iterazione: ripetizione che ha uno scopo; 7) Metodi di rilassamento; 8) Metodi Monte Carlo; 9) Alcune tecniche speciali; 10) Applicazioni dei calcolatori - presente e futuro; 11) Bibliografia (sono indicati alcuni testi introduttivi elementari).

G. CAPRIZ

RAFAEL ARTZY, *Linear Geometry*, Addison Wesley Co., Reading Mass., 1965, pp. IX+273, sh. 74.

Quest'opera, ispirata alle lezioni del geometra tedesco Kurt Reidemeister, si propone di offrire una trattazione dei fondamenti della geometria affine e proiettiva che, pur mantenendosi aderente allo spirito classico, utilizzi appieno metodi e conoscenze che lo studente trova oggi negli altri corsi universitari. Largo uso vien fatto quindi dell'Algebra lineare per introdurre i sistemi di coordinate negli spazi e notevole rilievo vien dato all'aspetto gruppale delle trasformazioni geometriche. È da notare a questo proposito che tutti i concetti ed i fatti algebrici necessari alla trattazione vengono di volta in volta richiamati e sviluppati quanto basta per l'utilizzazione che se ne fa.

L'opera si compone di quattro capitoli e si chiude con una lista dei simboli, una degli assiomi ed una terza dei gruppi di trasformazioni incontrati nel testo.

I primi tre capitoli trattano dello studio delle trasformazioni del piano euclideo utili alla Geometria, degli spazi affini, degli spazi proiettivi.

È interessante l'uso che l'Autore fa dei numeri complessi per lo studio delle trasformazioni del piano euclideo (1° capitolo).

Alla fine del 2° capitolo, precedute dalla nozione di prodotto scalare, vengono studiate le isometrie di uno spazio euclideo: cenni sulle nozioni di misura ed orientazione concludono il capitolo.

Parte della trattazione, infine, è dedicata alla presentazione di vari modelli di Geometrie non-euclidee: il piano iperbolico di Poincaré, i piani iperbolico ed ellittico di Klein-Cayley, lo spazio ellittico a tre dimensioni ottenuto utilizzando i quaternioni. Un cenno ad altre Geometrie conclude questa prima parte.

Il quarto capitolo è di natura differente dai precedenti: tratta della costruzione assiomatica di varie Geometrie del piano: iniziando con i soli assiomi di incidenza (per il trattamento analitico vengono introdotti gli anelli ternari), si prosegue poi con le proprietà di Desargues e di Pappo, con gli assiomi dell'ordinamento, della continuità, della congruenza.

Il testo è corredato da numerosi esercizi ben scelti per illustrare e completare le teorie trattate. Utili consigli bibliografici si trovano alla fine degli ultimi due capitoli.

Ottima la veste tipografica.

Nell'opinione del recensore l'opera in esame apporta un notevole contributo alla letteratura matematica specialmente in considerazione della chiarezza dell'esposizione, dell'autosufficienza della trattazione e della relativa scarsità di testi che trattino modernamente della Geometria classica ad un livello accessibile senza troppo sforzo agli studenti dei primi anni universitari. Il recensore ritiene che la lettura di quest'opera che, come già si è detto, offre un esempio di coesistenza di spirito classico e metodi moderni, possa riuscir particolarmente utile agli Insegnanti delle Scuole Medie Superiori.

S. CIAMPA

LÀSLÒ RÉDEI, *Begründung der Euclidischen und Nichteuclidischen Geometrien nach* F. KLEIN, Akademiai Kiadò, Budapest, 1965, p. 363.

Come è già indicato nel titolo e come è chiaramente detto nella introduzione, l'A. si è proposto di presentare i fondamenti delle geometrie euclidee e noneuclidee secondo l'indirizzo di F. Klein, prescindendo del tutto da approcci più moderni. L'A. muove dalla affermazione, in buona parte giustificata, che l'indirizzo del Klein non ha trovato nella letteratura uno sviluppo sufficiente; e si propone di colmare questa lacuna. Ciò lo costringe com'è ovvio a sviluppare prima la geometria proiettiva (del piano e dello spazio), che occupa i primi sei capitoli, mentre soltanto nel settimo ed ultimo s'incomincia a parlare dei tre tipi di geometria non-euclidee. La dimostrazione della non-contradditorietà di esse chiude sostanzialmente la trattazione.

L'esposizione, chiara e rigorosa, si vale del linguaggio e di simboli dell'insiemistica. La bibliografia è estremamente succinta: non sono p. es. citati i libri di G. Fano e di O. Perron.

E. BOMPIANI

ISRAEL GROSSMANN, WILHELM MAGNUS, *Groups and their graphs*, Random House, New York, 1964, pp. 1-195, $ 1.95.

Il presente volume contiene un'esposizione molto piana ed elementare delle prime proprietà della teoria dei gruppi, in cui si insiste soprattutto sulle rappresentazioni più visive e concrete dei gruppi stessi, in particolare su certi tipi di « grafi » che ne traducono la struttura.

Introdotto il concetto di gruppo con molti esempi, sulla solita tavola di moltiplicazione vengono rilevate proprietà geometriche che traducono proprietà del gruppo stesso.

Si illustrano poi ampiamente, soprattutto nei casi più semplici, i gruppi (liberi) con « generatori » definiti da « relazioni » e per questi si stabiliscono dei grafi. In tali grafi i vertici sono gli elementi del gruppo, gli spigoli sono in relazione con i generatori, le « parole » sono i cammini, e la legge di composizione è tradotta da successioni di cammini.

Dopo questa che è la parte più originale del volume, si riferisce, sempre in forma elementare e con molta esemplificazione, su nozioni più comuni, come: sottogruppi, omomorfismi ed isomorfismi fra gruppi, gruppi di permutazioni, sottogruppi normali, laterali di un sottogruppo e gruppo fattoriale

Per i gruppi con generatori si riallaccia il concetto di sottogruppo normale all'aggiunta di « relazioni » e si confrontano i grafi di un gruppo G e del gruppo fattoriale G/H (di G rispetto ad un suo sottogruppo normale H).

Si descrivono infine esempi classici di gruppi: il gruppo dei quaternioni, i gruppi totali di sostituzioni ed i relativi sottogruppi alterni, i gruppi di cammini in uno spazio (S_3) tagliato secondo linee (caso di un cerchio e di due cerchi sconcatenati), i gruppi di disegni su carte da parati, il gruppo del dodecaedro ed il gruppo dell'icosaedro.

Ai vari capitoli sono aggiunti parecchi esercizi dei quali alla fine del testo è data la soluzione.

Il volume forse un po' prolisso, è però di facile lettura e presuppone una cultura matematica del tipo di quella fornita abitualmente dalle scuole secondarie. La grande quantità di esempi aiuta la comprensione delle definizioni che sono date con cura e precisione. Di solito l'esposizione non va molto al di là delle definizioni. Sono indicati, non dimostrati, alcuni teoremi classici e vi sono anche brevi note storiche sui matematici celebri via via citati.

Alla fine è riportata una breve bibliografia.

C. MARCHIONNA TIBILETTI

D. E. RUTHERFORD, *Classical mechanics*, D. E. Edinburgh and London, Oliver & Boyd, 1964, VIII, 206 pp.; 12, 1/2s.

È un ottimo, seppure assai conciso, testo di Meccanica classica al livello del primo biennio universitario (apparso nel 1951, esso è giunto alla sua terza edizione, dopo una ristampa della seconda).

I frequenti riferimenti e rimandi ad altre opere specifiche (della collezione « University Mathematical Texts », curata, in collaborazione, dall'A. e da A. C. Aitken) e la effettiva riduzione all'essenziale di ogni argomento trattato, rendono ragione della mole assai ridotta del volume, del quale appaiono ben palesi le finalità spiccatamente didattico applicative; cui non sono peraltro mai sacrificati il rigore e la chiarezza della esposizione.

L'opera è articolata in cinque capitoli, fra i quali la materia è così suddivisa: cap. I: Cinematica del punto e del corpo rigido; cap. II: Nozione di forza (introdotta nel senso newtoniano; forze di gravitazione, elettromagnetiche, d'inerzia, vincolari); cap. III: Dinamica del punto; cap. IV: Dinamica del corpo rigido; cap. V: Elementi di Meccanica analitica dei sistemi olonomi (equazioni di Lagrange e di Hamilton; principio di Hamilton).

Numerosi e ben scelti esercizi, risolti nel testo o proposti alla fine di ogni capitolo, arricchiscono il volumetto, che non trascura, là dove più immediata ne possa scaturire una formulazione del tutto elementare, alcuni problemi atti ad iniziare il lettore a questioni più moderne di Meccanica (nozioni di funzione di probabilità, dinamica del punto di massa variabile (cap. III); nozione di funzione d'onda (cap. V)).

L. CAPRIOLI