
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANNA PUGLISI

Sulla decomposizione della legge di probabilità di Cauchy.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 21
(1966), n.1, p. 12–18.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_1_12_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulla decomposizione della legge di probabilità di Cauchy

ANNA PUGLISI (Palermo)

Sunto. - Si prende in esame una decomposizione della legge di probabilità $\mathcal{C}_a$ di Cauchy, in due leggi di tipi diversi da quello di $\mathcal{C}_a$, data recentemente da F. Arcangeli. Si fa vedere che questa decomposizione vale solo per valori $a \geq 1$ del parametro; tuttavia, partendo da essa, si possono costruire quante si vogliono decomposizioni di $\mathcal{C}_a$, in due, (o più, o infinite) leggi di tipi diversi. Si mostra che queste leggi sono infinitamente divisibili e appartengono al dominio d'attrazione della legge di Cauchy.

1. In una interessante Nota, apparsa recentemente su questo Bollettino ⁽¹⁾, F. ARCANGELI ha mostrato, con un semplice esempio, che una legge di probabilità di CAUCHY è decomponibile non solo in leggi di CAUCHY, ma anche in leggi diverse da quelle di CAUCHY, contrariamente a quel che accade per le leggi di GAUSS e per le leggi di POISSON, le quali sono decomponibili, rispettivamente, solo in leggi di GAUSS e in leggi di POISSON ⁽²⁾.

Com'è noto la funzione caratteristica (f.c.) di una legge di CAUCHY è della forma:

$$(1) \quad \chi(t) = e^{-a|t|}, \quad (a > 0)$$

dove a è un parametro positivo.

⁽¹⁾ F. ARCANGELI, *Sulla decomposizione di una variabile casuale seguente la legge di Cauchy*, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», Serie III, Anno XX, N. 2, giugno 1965.

⁽²⁾ Veramente la decomponibilità di una legge di CAUCHY, in leggi diverse da quelle di CAUCHY, risulta da una proposizione più generale: «la funzione caratteristica di una legge stabile, diversa dalla legge di GAUSS, ammette un fattore indecomponibile (e anzi è divisibile per il prodotto di una successione infinita di funzioni caratteristiche indecomponibili)». (Cfr. E. LUKACS, *Fonctions caractéristiques*, Dunod, Paris, 1964, pag. 129-130). Per quanto, poi, riguarda più particolarmente la legge di CAUCHY, il LUKACS dà (l.c. pag. 218) una decomposizione in due leggi infinitamente divisibili non stabili, una delle quali, avendo il momento del 2° ordine finito, appartiene al dominio d'attrazione della legge di GAUSS, mentre l'altra appartiene al dominio d'attrazione della legge di CAUCHY.

Chiamerò $\mathcal{C}_a$ la legge di CAUCHY di parametro a .

La decomposizione della (1) data dall'ARCANGELI ha come fattori le due f.c.

$$(2) \quad \varphi(t) = \frac{e^{-\alpha|t|}}{1 + |t|}, \quad (\alpha \geq 0)$$

$$(3) \quad \psi(t) = (1 + |t|)e^{-\beta|t|}, \quad (\beta \geq 1).$$

(L'ARCANGELI, veramente, dà le condizioni $\alpha > 0$, $\beta > 1$, ma si può mostrare che per $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ sono ancora f.c.; le condizioni a destra delle (2) e (3) sono necessarie e sufficienti perchè i secondi membri siano f.c.).

Segue subito da (1), (2) e (3):

$$(4) \quad \chi(t) = \varphi(t) \cdot \psi(t),$$

a patto che sia

$$(5) \quad \alpha + \beta = a.$$

Sotto questa condizione la legge $\mathcal{C}_a$ è decomponibile nelle due leggi (2) e (3) che *non* sono leggi di CAUCHY.

2. Senonchè per $a < 1$, la condizione (5) è incompatibile con le condizioni ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$) e pertanto la decomposizione (4) appare valida solo per le leggi $\mathcal{C}_a$ con parametro $a \geq 1$.

3. È facile, però, partendo, appunto, dal risultato dell'ARCANGELI, costruire per qualsiasi valore del parametro a , quante si vogliono decomposizioni di $\mathcal{C}_a$ in due (o più, o infinite) leggi di tipo diverso da quello di $\mathcal{C}_a$.

Sappiamo che se $u(t)$ è una f.c., tale sarà anche $u(\lambda t)$. Saranno dunque f.c. le funzioni

$$(6) \quad \varphi_1(t) = \frac{e^{-h|t|}}{1 + \lambda|t|} \quad (h \geq 0, \lambda \geq 0)$$

$$(7) \quad \psi_1(t) = (1 + \lambda|t|)e^{-k|t|}, \quad (k \geq \lambda \geq 0)$$

Dato $a > 0$ è sempre possibile determinare h , k , λ in modo che valgano le condizioni a destra delle (6) e (7) insieme alla condizione

$$h + k = a$$

e quindi è sempre possibile la decomposizione:

$$\chi(t) = \varphi_1(t)\psi_1(t)$$

della legge di CAUCHY in due leggi che non sono di CAUCHY.

4. Una più generale decomposizione della (1) si ha osservando che

$$(8) \quad \sigma(t) = \frac{1}{(1 + \lambda |t|)^{\gamma}}, \quad (\gamma \geq 0)$$

è funzione caratteristica ⁽³⁾. Segue subito che sono f.c.:

$$(9) \quad \varphi_2(t) = \frac{e^{-h|t|}}{(1 + \lambda |t|)^{\gamma}}, \quad (\gamma \geq 0, \lambda > 0, h \geq 0),$$

$$(10) \quad \psi_2(t) = (1 + \lambda |t|)^{\gamma} e^{-k|t|}, \quad (0 \leq \gamma \leq 1, k \geq \lambda > 0).$$

E si ha ovviamente

$$(11) \quad \chi(t) = \varphi_2(t)\psi_2(t) = e^{-(h+k)|t|}, \quad (h + k = a).$$

5. Facciamo vedere che la funzione $\psi_2(t)$, che scriveremo

$$(12) \quad \psi(t; \lambda, \sigma, \beta) = (1 + \lambda |t|)^{\sigma} e^{-\beta|t|},$$

e che rappresenta globalmente la (9) e la (10), a seconda del segno di σ , continua ad essere f.c. sotto le condizioni (necessarie e sufficienti):

$$(13) \quad \lambda \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \beta \geq \sigma\lambda,$$

(che non impegnano σ).

Cominciamo col mostrare che la funzione

$$(14) \quad \psi(t) = (1 + |t|)^{\sigma} e^{-\beta|t|}$$

con

$$(15) \quad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad \beta \geq \sigma$$

è una f.c.

(3) Risulta dal seguente teorema di POLYA: Una funzione reale $\sigma(t)$, continua, definita per tutti i valori reali di t , tale che $\sigma(0)=1$, $\sigma(-t)=\sigma(t)$, $\sigma(\infty)=0$, convessa verso il basso per $t > 0$, è la f.c. di una funzione di ripartizione assolutamente continua. (Cfr. E. LUKACS, l.c. pag. 74; o anche S. V. LINNIK, *Décompositions des lois de probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1962, pag. 45).

Tolto il caso $\beta = \sigma = 0$, cui corrisponde la f.c. banale $\psi(t) = 1$, possiamo fare uso della formula di inversione di FOURIER, che, nel caso nostro, può scriversi:

$$g(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (1+t)^\sigma e^{-\beta t} \cos yt \, dt.$$

Con successive integrazioni per parti si trova:

$$(16) \quad g(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\beta - \sigma}{\beta^2 + y^2} + \frac{2\beta\sigma}{\beta^2 + y^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta t} \cos yt}{\pi(1+t)^{1-\sigma}} dt + \\ + \frac{\sigma(1-\sigma)}{\beta^2 + y^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta t} \cos yt}{\pi(1+t)^{2-\sigma}} dt.$$

I due integrali sono, rispettivamente, le densità di probabilità corrispondenti alle funzioni caratteristiche

$$\frac{e^{-\beta|t|}}{(1+|t|)^{1-\sigma}}, \quad \frac{e^{-\beta|t|}}{(1+|t|)^{2-\sigma}},$$

e quindi il secondo e il terzo termine del 2° membro della (16) non sono mai negativi. Lo stesso avviene per il primo termine quando $\beta \geq \sigma$.

Inoltre è facile verificare che si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy = 1.$$

Pertanto, sotto le condizioni (sufficienti) (15), la funzione (14) è una f.c.

D'altra parte se $\beta < \sigma$, la condizione necessaria $|\psi(t)| \leq 1$ non è verificata: ne segue che, quando vale la prima delle (15), la seconda è necessaria e sufficiente affinché $\psi(t)$ sia f.c.

Se ne trae immediatamente che la funzione

$$(17) \quad \psi(t; \sigma, \beta) = (1+|t|)^\sigma e^{-\beta|t|}$$

è f.c., qualunque sia σ , sotto le condizioni (necessarie e sufficienti)

$$(18) \quad \beta \geq 0, \quad \beta \geq \sigma.$$

Il passaggio alle (12) e (13) è immediato.

6. È subito visto che la f.c. (17) è *infinitamente divisibile* dato che, qualunque sia l'intero positivo n , la funzione

$$[\psi(t; \sigma, \beta)]^{\frac{1}{n}} = \psi\left(t; \frac{\sigma}{n}, \frac{\beta}{n}\right)$$

è anch'essa una funzione caratteristica. Lo stesso dicasi della (12).

Convieni, per altro verso, notare, che detta $X(\sigma, \beta)$ una *funzione aleatoria* governata dalla legge (17), comunque si prendano i punti (σ_1, β_1) e (σ_2, β_2) , con $\beta_2 > \beta_1$ nel dominio definito dalle (18), si può scrivere

$$X(\sigma_1, \beta_1) + X(\sigma_2 - \sigma_1, \beta_2 - \beta_1) = X(\sigma_2, \beta_2)$$

dove il 2° termine del primo membro è stocasticamente indipendente dal 1° e tende a zero, nel senso del Calcolo delle Probabilità, quando $(\sigma_1, \beta_1) \rightarrow (\sigma_2, \beta_2)$.

7. Consideriamo ora le funzioni:

$$(19) \quad \Phi_{n,m}(t) = \frac{\prod_{r=1}^n (1 + \lambda_r |t|)^{\gamma_r}}{\prod_{r=1}^m (1 + \mu_r |t|)^{\delta_r}} e^{-h_{n,m}|t|}$$

$$(20) \quad \Psi_{m,n}(t) = \frac{\prod_{r=1}^m (1 + \mu_r |t|)^{\delta_r}}{\prod_{r=1}^n (1 + \lambda_r |t|)^{\gamma_r}} e^{-k_{m,n}|t|}$$

che sono funzioni caratteristiche sotto le condizioni:

$$\lambda_r \geq 0, \quad \mu_r \geq 0, \quad \gamma_r \geq 0, \quad \delta_r \geq 0,$$

$$h_{n,m} \geq \sum_{r=1}^n \lambda_r \gamma_r, \quad k_{m,n} \geq \sum_{r=1}^m \mu_r \delta_r.$$

Viene:

$$\Phi_{n,m}(t) \Psi_{m,n}(t) = e^{-(h_{n,m} + k_{m,n})|t|}$$

e si ha così una decomposizione della legge di CAUCHY, in leggi infinitamente divisibili, assai più generale della (11).

Allo stesso risultato si perviene se nei secondi membri della (19) e della (20), introduciamo prodotti infiniti, con opportune limitazioni per i parametri.

Per esempio: poniamo (per semplicità) $m = n$, e scriviamo Φ_n , Ψ_n , h_n , k_n in luogo di $\Phi_{n,m}$, $\Psi_{n,m}$, $h_{n,m}$, $k_{n,m}$; imponiamo le ulteriori condizioni $\gamma_r \leq 1$, $\delta_r \leq 1$.

Se le serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r, \quad \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r$$

sono convergenti, e se le successioni $\{h_n\}$ e $\{k_n\}$ sono convergenti rispettivamente ad h e k , le funzioni $\Phi_n(t)$, $\Psi_n(t)$ tenderanno a due funzioni limite $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$, che sono f.c., come è facile provare, e che hanno come prodotto la f.c. della legge di CAUCHY con parametro $h + k$ ⁽⁴⁾.

8. Facciamo vedere, infine, che le leggi che abbiamo qui considerato appartengono al dominio d'attrazione della legge di CAUCHY ⁽⁵⁾.

Basterà mostrarlo per la (12).

Dette $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variabili casuali indipendenti, governate, tutte, dalla legge (12), consideriamo la v.c.

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{\theta_n}$$

⁽⁴⁾ Un'altra semplice classe di decomposizioni della legge di CAUCHY, analoga alla precedente, si può costruire, osservando che la funzione:

$$f_1(t; \lambda, h) = (1 + \lambda^2 t^2)^{-1} e^{-h|t|}, \quad (\lambda \geq 0, h \geq 0)$$

è f.c. in quanto prodotto di due f.c.; mentre si prova facilmente che lo è pure:

$$f_2(t; \lambda, k) = (1 + \lambda^2 t^2) e^{-k|t|}, \quad \left(\lambda \geq 0, k \geq \frac{3\lambda}{2\sqrt{2}} \right).$$

Si ha quindi la decomposizione:

$$e^{-a|t|} = f_1(t; \lambda, h) f_2(t; \lambda, k)$$

con

$$h + k = a.$$

Entrambe le leggi f_1 ed f_2 appartengono al dominio d'attrazione della legge di CAUCHY.

⁽⁵⁾ V. nota ⁽²⁾.

dove $\theta_n > 0$ è da determinare. La f.c. di questa v.c. sarà

$$\chi_n(t) = e^{-\frac{n}{\theta_n} \beta |t|} \left(1 + \frac{\lambda}{\theta_n} |t| \right)^{n\sigma}.$$

Scegliendo per θ_n il termine generale di una successione di numeri positivi, divergente in modo che $\frac{\theta_n}{n}$ tenda alla costante $\beta - \sigma\lambda > 0$, avremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(t) = e^{-|t|},$$

il che prova l'asserto.

*Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.
il 27 gennaio 1966*