

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

ANTONIO CARLO GARIBALDI

## Vibrazioni non sinusoidali in un sistema non lineare e loro variazione parametrica.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 20*  
(1965), n.4, p. 421–432.

Zanichelli

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1965\\_3\\_20\\_4\\_421\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_4_421_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



# SEZIONE SCIENTIFICA

## BREVI NOTE

### Vibrazioni non sinusoidali in un sistema non lineare e loro variazione parametrica

ANTONIO CARLO GARIBALDI (Genova) (\*)

**Sunto.** - Si considera un fenomeno di vibrazioni non lineari in cui il termine di richiamo contiene un parametro  $\beta$  e si studiano le proprietà dell'unica soluzione periodica stabile (ciclo limite) al variare di  $\beta$ . Le limitazioni sul campo di esistenza e sull'ampiezza di questa soluzione sono date dapprima supponendo convenientemente piccolo il termine di resistenza; mediante una applicazione del 2° Metodo di Lyapounov si ottengono risultati validi in ipotesi più larghe.

1. Consideriamo l'equazione:

$$(1) \quad \ddot{x} + x + 2\beta x^3 = \varepsilon \gamma \dot{x}(a^2 - \dot{x}^2) \quad \gamma > 0, \varepsilon > 0, \beta \geq 0$$

che rappresenta un fenomeno di vibrazioni non-lineari sostanzialmente noto [1] (1).

Volendo metter in luce l'aspetto parametrico che più ci interessa, si può pensare al sistema meccanico costituito da un pattino pesante che scorre su una cinghia scabra mobile di moto uniforme, assumendo non lineare la legge di attrito, dipendente dalla velocità relativa, e ritenendo inoltre il sistema soggetto ad una forza di richiamo esplicita sul pattino da una molla a caratteristiche non lineari cioè debole o forte a seconda che sia  $\beta < 0$  oppure  $\beta > 0$ .

È da notare che se si fa  $\beta = 0$ , cioè si suppone la molla lineare come d'abitudine la (1) si riduce alla nota equazione di Lord RAYLEIGH. Inoltre con ovvia normalizzazione si può fare  $a^2 = 1$ , come supporremo senz'altro nel seguito.

Vogliamo applicare alla (1) un criterio dato da G. COLOMBO [2] per la ricerca di soluzioni periodiche supponendo  $\beta$  reale qualsiasi ed  $\varepsilon$  piccolo. Si determinano con esso le soluzioni periodiche di

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n° 41 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1964/65.

(1) I numeri in [ ] si riferiscono alla bibliografia finale.

(1) che per  $\varepsilon \rightarrow 0$  tendono nel piano delle fasi a delle curve appartenenti alla famiglia individuata dall'equazione differenziale:

$$(2) \quad \ddot{x} + x + 2\beta x^3 = 0$$

ottenuta dalla (1) facendo  $\varepsilon = 0$ . Tali curve sono quartiche del tipo:

$$(3) \quad x^2 + x^2 + \beta x^4 = x_0^2 + \beta x_0^4$$

avendo assunto come parametro della famiglia l'ascissa  $x_0$  dell'intersezione della curva con l'asse  $x$  positivo:  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Ciò significa che nel piano delle fasi vi sono curve del tipo (3) che sono limite di cicli limite della (1); occorre ovviamente assicurarsi che queste curve, o porzioni di curve, risultino chiuse, il che non è banale per  $\beta < 0$ .

L'interesse della ricerca consiste nel fatto che le soluzioni periodiche così individuate, a differenza di quanto avviene di solito, non sono sinusoidali pure in prima approssimazione, come avverrebbe se le curve limite fossero cerchi. Le vibrazioni rappresentate dalla (2) sono del tipo del pendolo e si esprimono per mezzo di funzioni ellittiche.

*Lo studio della (1), in questa ipotesi di piccola non-linearità porta a concludere che per tutti i valori di  $\beta$  superiori ad un valore  $\beta^* < 0$  che viene esplicitamente determinato esiste sempre una ed una sola soluzione periodica stabile, rappresentata al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  da una curva (3). È interessante esaminare come variano con  $\beta$  la forma e il periodo della soluzione periodica.*

Si osserva inoltre che una applicazione del metodo diretto di LYAPOUNOV, seguendo LEFSCHETZ-LASALLE [3], permette di stabilire per qualunque  $\varepsilon$ , e quindi anche fuori dell'ipotesi di piccola non-linearità, limitazioni inferiori per l'eventuale ciclo limite. Esse naturalmente concordano in pieno con i risultati trovati.

**2.** Premettiamo anzitutto alcune notizie sulle traiettorie delle equazioni (1), (2) nel piano delle fasi.

È subito visto che qualunque sia  $\beta$ , l'origine è sempre un punto singolare e precisamente essa risulta un fuoco instabile per la (1) (almeno per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo) e un centro per la (2).

Se  $\beta$  è positivo l'origine è l'unico punto singolare e per la (2) tutte le traiettorie sono curve chiuse circondanti l'origine stessa.

Se invece  $\beta$  è negativo vi sono altri due punti singolari, corrispondenti a colli situati sull'asse  $x$ , simmetrici rispetto all'origine e di ascissa  $x_0$ , per cui:

$$x_0^2 = -\frac{1}{2\beta}.$$

Le traiettorie della (2) sono ora più complesse e vi è solo una zona di curve chiuse circondanti l'origine, delimitata dalle separatrici di equazione complessiva:

$$(4) \quad \dot{x}^2 = \beta^2 \left( x^2 + \frac{1}{2\beta} \right)^2$$

passanti naturalmente per i colli.

Volendo ora impostare il nostro problema osserviamo che dalla (3) si ricava:

$$\dot{x} = [(x_0^2 - x^2)(1 + \beta x_0^2 + \beta x^2)]^{\frac{1}{2}}$$

Introduciamo ora l'integrale:

$$(5) \quad I(x_0) = \gamma \int_{\gamma x_0} \dot{x}(1 - \dot{x}^2) dx = \\ = \gamma \int_{\gamma x_0} [(x_0^2 - x^2)(1 + \beta x_0^2 + \beta x^2)]^{\frac{1}{2}} (1 - x_0^2 - \beta x_0^4 + x^2 + \beta x^4) dx$$

che occorre calcolare esplicitamente.

Il criterio accennato di G. COLOMBO afferma che per  $\varepsilon \rightarrow 0$  le soluzioni periodiche di (1) tendono alle curve (3) per cui  $x_0$  è dato dall'equazione:

$$(6) \quad I(x_0) = 0.$$

Esse risultano stabili o instabili a seconda che  $\frac{dI}{dx_0}$  calcolata in corrispondenza alle radici di (5) risulti  $< 0 >$  0.

Cominciamo a sviluppare il calcolo di  $I(x_0)$  per  $\beta > 0$  ponendo:

$$(7) \quad K^2 = \frac{\beta x_0^2}{1 + 2\beta x_0^2} \quad 0 < K^2 < \frac{1}{2}$$

e trasformando l'integrale con la sostituzione:

$$x = x_0 \cos \vartheta \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

Si ottiene:

$$I(x_0) = \frac{4\gamma}{\beta^{\frac{1}{2}}} K^2 (1 - 2K^2)^{-\frac{7}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - K^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} [\beta(1 - 2K^2)^2 \sin^2 \vartheta - \\ - K^2(1 - 2K^2) \sin^4 \vartheta - K^4 \sin^4 \vartheta (2 - \sin^2 \vartheta)] d\vartheta.$$

Il calcolo è laborioso e riporteremo soltanto il risultato che si esprime mediante i classici integrali ellittici di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie:

$$E = E\left(\frac{\pi}{2}, K\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - K^2 \sin^2 \vartheta)^{\frac{1}{2}} d\vartheta,$$

$$F = F\left(\frac{\pi}{2}, K\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - K^2 \sin^2 \vartheta)^{-\frac{1}{2}} d\vartheta$$

che sono tabulati [4].

Si giunge così all'espressione:

$$(8) \quad I(x_0) = \frac{4\gamma}{105\beta^2} (1 + 2\beta x_0^2)^{\frac{1}{2}} \{ [-35\beta + 6(8\beta^2 x_0^4 + 8\beta x_0^2 + 1)]E + \\ + (1 + \beta x_0^2)F[35\beta - 3(10\beta^2 x_0^4 + 13\beta x_0^2 + 2)] \}.$$

dove naturalmente la  $x_0$  è contenuta in  $E$ ,  $F$  tramite  $K^2$ .

Il caso  $\beta < 0$  si tratta analogamente ponendo:

$$(9) \quad K^2 = \frac{-\beta x_0^2}{1 + \beta x_0^2} \quad 0 < K^2 < 1$$

con la limitazione, necessaria per dar senso al radicale che appare in (5):

$$(10) \quad 1 + 2\beta x_0^2 > 0 \quad 0 < x_0^2 < -\frac{1}{2\beta}.$$

Si arriva così alla formula:

$$(11) \quad I(x_0) = \frac{4\gamma}{105\beta^2} (1 + \beta x_0^2)^{\frac{1}{2}} \{ [-35\beta + 6(8\beta^2 x_0^4 + 8\beta x_0^2 + 1)]E + \\ + (1 + 2\beta x_0^2)F[35\beta - 3(10\beta^2 x_0^4 + 13\beta x_0^2 + 2)] \}.$$

Un semplice esame delle formule trovate mostra che per  $\beta \rightarrow 0$  esse perdono significato in quanto il numeratore ed il denominatore tendono a zero. Se però si applica ai secondi membri di (8) ed (11) considerati funzione di  $\beta$ , la regola di HÔPITAL si ottiene lo sviluppo:

$$(12) \quad I(x_0) = \pi\gamma x_0^2 \left(1 - \frac{3}{4}x_0^2\right) + o(\beta)$$

valido per  $\beta \rightarrow 0$  sia da destra che da sinistra. Ciò consente di verificare che per  $\beta \rightarrow 0$  la radice dell'equazione (6) tende al valore  $x_0$  per cui:

$$x_0^2 = \frac{4}{3}$$

che rappresenta il ciclo limite stabile cui tende per  $\varepsilon \rightarrow 0$  la soluzione periodica di (1). Infatti essendo ora possibile supporre anche  $\beta$  piccolo si può applicare il metodo di perturbazione che dà facilmente il risultato.

Se invece si fa tendere  $\beta$  a  $+\infty$  si può vedere che la soluzione  $x_0 \rightarrow 0$  e precisamente si ha  $\beta x_0^2 \rightarrow \infty$  e  $\beta x_0^4 \rightarrow \frac{7}{6}$ . Ciò significa che la quartica (3) corrispondente si schiaccia in un segmento situato sull'asse  $x$  di estremi  $-\sqrt{\frac{7}{6}}$ ,  $\sqrt{\frac{7}{6}}$ .

Infine è facile verificare che per  $\beta \rightarrow \beta^* = -\frac{6}{35}$  l'equazione (6) presenta la soluzione doppia per cui  $x_0^2 = -\frac{1}{2\beta}$ ; essa corrisponde alla quartica di transizione costituita dall'insieme delle due separatrici di equazione (4). Essa segna la degenerazione del ciclo limite secondo il fenomeno della fusione delle separatrici corrispondenti ai due colli.

La sparizione di un ciclo limite per fusione di separatrici è stata messa in luce da G. VILLARI [5] per una equazione differenziale formalmente assai differente dalla (1).

Più precisamente in [5] è trattato un sistema auto-oscillante in cui la resistenza è non-lineare e dipende da un parametro mentre nel nostro caso il parametro interviene nella forza di richiamo; inoltre noi determiniamo esplicitamente il valore critico  $\beta^*$  del parametro.

**3.** La risoluzione della equazione (6) è fatta naturalmente con un metodo approssimato usando le consuete tavole degli integrali ellittici [4].

Nel caso  $\beta > 0$  si pone:

$$F^* = F(1 + \beta x_0^2)$$

$$\Psi = F^* - E$$

$$\Phi = F^* \left( 5\beta^2 x_0^4 + \frac{13}{2} \beta x_0^2 + 1 \right) - E(8\beta^2 x_0^4 + 8\beta x_0^2 + 1)$$

per modo che l'equazione (6) diventa:

$$\Phi(x_0^2) - \frac{35\beta}{6} \Psi(x_0^2) = 0.$$

Ora è da notare che  $\Phi$  e  $\Psi$  contengono  $x_0^2$  solo tramite  $\beta x_0^2 = \frac{K^2}{1 - 2K^2}$ ; è dunque possibile tabulare queste funzioni nell'intervallo  $0 < K^2 < \frac{1}{2}$ . A questo punto si potrebbe pensare di fissare  $\beta$  e di approssimare lo zero di  $\Phi - \frac{35}{6} \beta \Psi$ . Poichè però ci interessa il comportamento della soluzione in funzione di  $\beta$ , si può eliminare una parte degli errori di approssimazione procedendo come segue. Per ognuno dei valori di  $K^2$  per cui ho calcolato la funzione  $\Phi - \frac{35}{6} \beta \Psi$  determino  $\beta$  in modo che essa sia nulla; da  $K^2$  passo a  $\beta x_0^2$  e, tenendo conto del valore di  $\beta$  trovato, ad  $x_0^2$ . Ho così una corrispondenza tra valori di  $\beta$  e soluzioni  $x_0^2$  della (6) che dà la tabella 1. Da essa traggio il grafico della fig. 1: esso mostra, tenuto conto anche dei valori limite, che al crescere di  $\beta$  da 0 a  $+\infty$ ,  $x_0^2$  decresce monotonamente dal valore limite  $\frac{4}{3}$  a zero.

TABELLA I

$\beta$	$x_0^2$
0,0197	1,3067
0,0251	1,2652
0,0629	1,2320
0,0742	1,2069
0,0862	1,1982
0,1004	1,1766
0,1161	1,1579
0,1343	1,1357
0,1785	1,0932
0,2738	1,0162
0,5872	0,8569
0,8287	0,7729
0,9984	0,7303
1,5089	0,6370
6,51	0,361
10,55	0,294
18,55	0,227
43,85	0,155
175	0,079

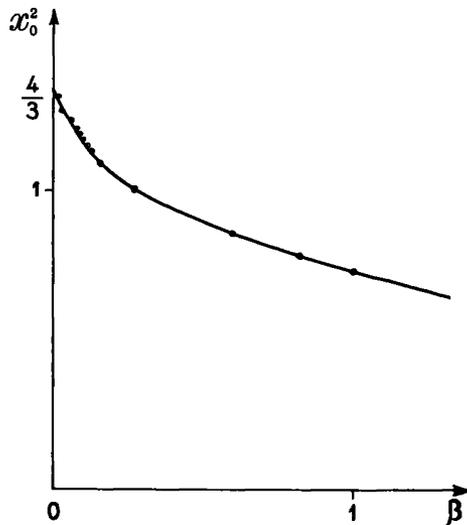


Figura 1

Ad ogni valore di  $x_0^2$  così determinato corrisponde una curva (3) che risulta limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  dei cicli limite di (1). Questa curva è percorsa in un tempo finito, che potremo chiamare limite, sempre

per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , del periodo dei cicli di (1). Precisamente si ha:

$$T = \oint \frac{dx}{x} = \oint [x_0^2 + \beta x_0^4 - x^2 - \beta x^4]^{-\frac{1}{2}} dx = 4F[1 + 2\beta x_0^2]^{-\frac{1}{2}}$$

essendo la  $F$  calcolata in corrispondenza dei  $\beta$  ed  $x_0^2$  del ciclo. È subito visto che  $T$  decresce dal valore  $2\pi$  che ovviamente assume per  $\beta = 0$  fino a zero.

Per  $\beta < 0$  il procedimento è analogo salvo che si pone ora:

$$F^* = F(1 + 2\beta x_0^2)$$

e naturalmente va ricordato che  $\beta x_0^2 = \frac{-K^2}{1 + K^2}$ . Il grafico è dato in fig. 2, corrispondente alla tabella 2; esso mostra che vi sono soluzioni solo quando  $\beta$  varia tra  $\beta^* = -\frac{6}{35}$  e 0.

TABELLA II

$\beta$	$x_0^2$
0,0216	1,3527
0,0300	1,3807
0,0485	1,4554
0,0539	1,4518
0,0591	1,4758
0,0641	1,4951
0,0692	1,5131
0,0744	1,5289
0,0795	1,5476
0,0845	1,5662
0,0943	1,6058
0,1195	1,7179
0,1344	1,8427
0,1478	1,9768
0,1574	2,1174
0,1637	2,2579
0,1676	2,3950
0,1700	2,5204
0,1708	2,6394
0,1713	2,7374
0,1714	2,9054

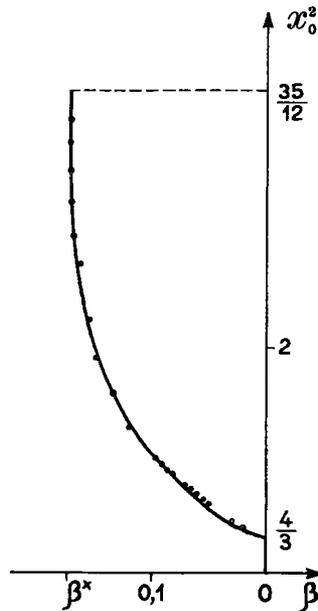


Figura 2

Al decrescere di  $\beta$ ,  $x_0^2$  cresce monotonamente fino al valore limite  $\frac{35}{12}$  che corrisponde alle separatrici (4). Per quanto riguarda

il limite del periodo  $T$  si ha:

$$T = 4F[1 + \beta x_0^2]^{-\frac{1}{2}}$$

ed esso cresce ora da  $2\pi$  a  $+\infty$ , come era da attendersi perchè il tempo impiegato a percorrere una separatrice è notoriamente infinito.

4. Vogliamo costruire, sfruttando il secondo metodo di LYAPOUNOV, una regione  $\Omega$ , il cui contorno indicheremo con  $\gamma_0$ , tale che si possa affermare che tutte le traiettorie di (1) aventi origine in  $\Omega$ , escono da  $\Omega$  attraverso  $\gamma_0$ , al crescere del tempo.

Per questo osserviamo anzitutto che se si cambia  $t$  in  $-t$  nella (1) l'origine diventa un punto singolare stabile. Mutare  $t$  in  $t$  è d'altra parte equivalente a supporre  $\varepsilon < 0$  in (1).

Ora dalla (1) passando al sistema si ottiene:

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2\beta x^3 + \varepsilon\gamma y(1 - y^2) \end{cases}$$

Consideriamo la funzione:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + \beta x^4)$$

supponendo per il momento  $\beta > 0$ . È subito visto che  $V(x, y)$  è di classe  $C^1$ , definita positiva per ogni  $x, y$  annullantesi solo per  $x = y = 0$ . Inoltre se si pensano  $x$  ed  $y$  funzioni di  $t$  in quanto soluzioni di (13) si ha subito:

$$\dot{V} = -\varepsilon\gamma y^2(y^2 - 1).$$

Sia  $\Omega$  la regione definita da:

$$x^2 + y^2 + \beta x^4 < 1.$$

Poichè in  $\Omega$  risulta  $\dot{V} \leq 0$  si dice che la  $V(x, y)$  è una funzione di LYAPOUNOV in  $\Omega$  relativa al sistema (13). Sussiste il seguente teorema di LEFSCHETZ-LASALLE: se in una regione limitata  $\Omega$ , contenente l'origine,  $V$  è di LYAPOUNOV e  $\dot{V} < 0$  in tutta  $\Omega$  tranne appunto l'origine, tutte le traiettorie di (13) che sono in  $\Omega$  per qualche valore di  $t$  tendono ad  $O$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Si dice anche che l'origine è asintoticamente stabile e che la regione  $\Omega$  ne misura l'asintotica stabilità. Per la dimostrazione confronta [3].

Tenendo conto dell'inversione di segno si conclude che in  $\Omega$  vale la proprietà esposta in principio.

Allora è chiaro che gli eventuali cicli di (1) non possono certo esser contenuti in  $\Omega$  e ciò qualunque sia il valore di  $\epsilon > 0$ . Pertanto anche i limiti per  $\epsilon \rightarrow 0$  di questi cicli che sono stati determinati nei numeri precedenti devono risultare esterni ad  $\Omega$ ; essi nel piano delle fasi circondano esternamente la curva  $\gamma_0$  contorno di  $\Omega$ :

$$x^2 + y^2 + \beta x^4 = 1.$$

Naturalmente anche  $\gamma_0$  varia con  $\beta$  e per  $\beta \rightarrow +\infty$  tende al segmento  $(-1, 1)$  tutto contenuto nel segmento  $(-\sqrt{\frac{7}{6}}, \sqrt{\frac{7}{6}})$  limite del ciclo.

Il procedimento indicato conduce a stabilire per l'ascissa  $x_0$  che individua la curva limite dei cicli per  $\epsilon \rightarrow 0$  la limitazione:

$$x_0^2 > \frac{-1 + (1 + 4\beta)^{\frac{1}{2}}}{2\beta}, \quad \beta > 0$$

e, tenendo conto del tempo di percorrenza delle curve del tipo (3) anche alla limitazione per il periodo:

$$T < 4(1 + 4\beta)^{-\frac{1}{2}} F\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 + 4\beta)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

La figura 3 mostra i vari casi possibili

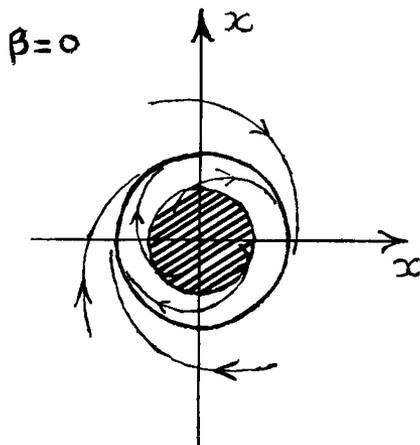


Figura 3a

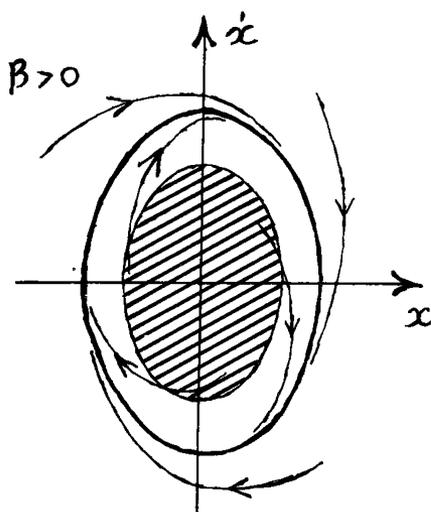


Fig. 3 b

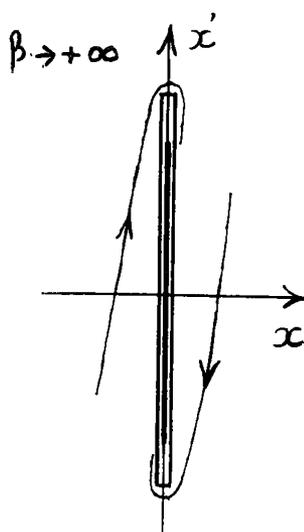


Fig. 3 c

Il caso  $\beta < 0$  si tratta in modo analogo, tenuto conto di alcune limitazioni imposte dalla struttura topologica più complessa. Possiamo ancora considerare la funzione:

$$V(x, y) = x^2 + y^2 - \delta^2 x^4 \quad \delta^2 = -\beta$$

che risulta definita positiva per  $x^2 < \frac{1}{\delta}$  ed  $y$  qualsiasi. La curva  $\gamma_0$ :

$$x^2 + y^2 - \delta^2 x^4 = 1$$

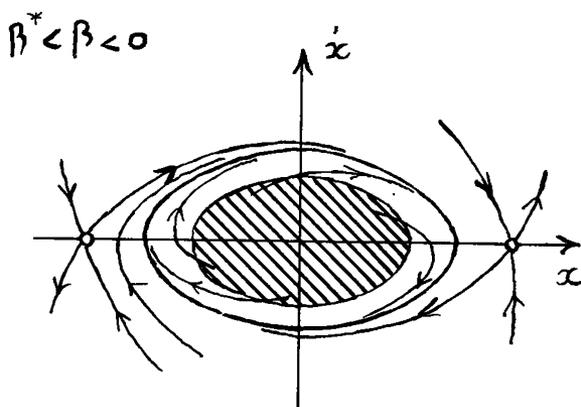


Fig. 4 a

contiene una porzione chiusa, circondante l'origine, solo per  $\delta^2 < \frac{1}{4}$ ; questa porzione interseca l'asse  $y$  nei punti  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$  e l'asse  $x$  in punti di ascisse  $\bar{x}_0 < \frac{1}{2\delta^2}$ : essa risulta allora contorno di una regione  $\Omega$  in cui  $\dot{V} \leq 0$  cui è applicabile il teorema precedente. Se  $\delta^2 = \frac{1}{4}$  la curva  $\gamma_0$  viene a passare per i due colli rappresentando complessivamente le separatrici (4): ciò mostra che la regione di asintotica instabilità si estende fino ai colli (Fig. 4). Nel

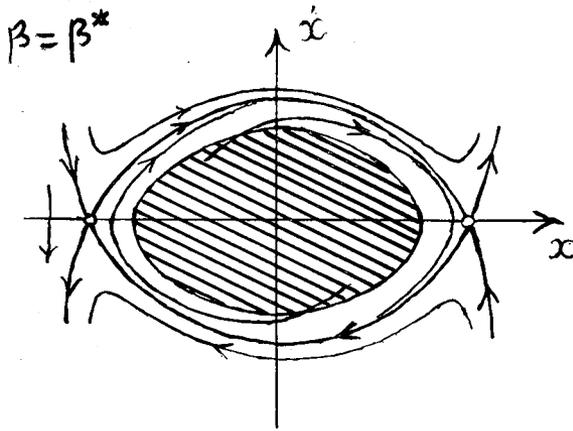


Fig. 4 b

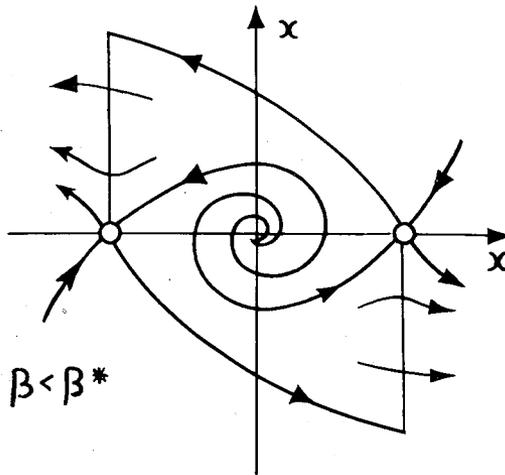


Fig. 5

caso che sia  $\delta^2 > \frac{1}{4}$  è effettivamente possibile costruire ancora in maniera più complicata usando segmenti ed archi di separatrici una regione  $\Omega$  di asintotica instabilità il cui contorno comprende i colli. (Fig. 5) Ciò basta per assicurarci che per  $\varepsilon$  qualunque e  $\delta^2 > \frac{1}{4}$  non vi possono esser cicli per il sistema (13) in quanto tutti gli eventuali cicli dovrebbero contenere i tre punti singolari del sistema per cui la somma degli indici topologici è  $-1$ : ciò è notoriamente assurdo essendo l'indice di un ciclo (semplice)  $+1$ . Il valore  $\beta = -\delta^2 = -\frac{1}{4}$  fornisce così, per  $\varepsilon$  qualunque una approssimazione del valore critico di  $\beta^*$  al disotto del quale non vi sono cicli. È ovvio a priori che per  $\beta > -\frac{1}{4}$  non si può esser sicuri dell'esistenza di cicli ma solo affermare che essi sono esterni ad  $\Omega$ : di fatto per  $\varepsilon$  piccolo i risultati del n. 3 dando per  $\beta$  il valore critico  $\beta^* = -\frac{6}{35}$  mostrano che nell'intervallo  $(-\frac{1}{4}, -\frac{6}{35})$  di valori di  $\beta$  non vi sono ancora cicli mentre per  $\beta > -\frac{6}{35}$  l'unico ciclo stabile trovato verifica le limitazioni costituite dall'essere esterno a  $\Omega$ . Esse sono:

$$x_0^2 > \frac{1 - (1 - 4\delta^2)^{\frac{1}{2}}}{2\delta}$$

$$T > 2 \left[ \left( \frac{1 + 2\delta}{2\delta^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{1 - 2\delta}{2\delta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] F \left[ \frac{1 - 2\delta^2 - (1 - 4\delta^2)^{\frac{1}{2}}}{2\delta^2} \right].$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] J. J. STOKER, *Non-linear vibrations*, Interscience, New York, 1950.
- [2] G. COLOMBO, *Sulla determinazione analitica delle soluzioni periodiche dei sistemi non-lineari autonomi*, «Rend. Accademia dei Lincei», ser. VIII, vol. XXVI, 1959.
- [3] J. LA SALLE - S. LEFSCHETZ, *Stability by Liapounov's direct method*, «Academic Press», New York, 1961.
- [4] JAHNKE-EMDE, *Funktionentafeln*, Teubner, Leipzig 1933.
- [5] G. VILLARI, *Cicli limite e fusione di separatrici*, «Annali di Matem.», Vol. XLII, 1956.