Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sergio Campanato, Guido Stampacchia

# Sulle maggiorazioni in $L^p$ nella teoria delle equazioni ellittiche.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **20** (1965), n.3, p. 393–399.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_3_393_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI*
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

# Sulle maggiorazioni in $L^p$ nella teoria delle equazioni ellittiche

SERGIO CAMPANATO e GUIDO STAMPACCHIA (Pisa) (*)

**Sunto.** - *Si dimostrano maggiorazioni in $L^p$ per le derivate di soluzioni di equazioni differenziali ellittiche utilizzando maggiorazioni in $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ di Campanato ed un teorema di interpolazione di Stampacchia.*

**Summary.** - *The $L^p$ estimates for derivates of solutions of elliptic differential equations are proved using $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ estimates of Campanato and an interpolation theorem of Stampacchia.*

Gli spazi funzionali $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ sono stati studiati recentemente da vari Autori (JOHN e NIRENBERG [6], MEYERS [8], CAMPANATO [1], STAMPACCHIA [12], SPANNE [11], DA PRATO [4]), che li hanno caratterizzati per i vari valori di $\lambda$.

Questi spazi sono stati utilizzati nella teoria dell'interpolazione (STAMPACCHIA [12] [13], CAMPANATO e MURTHY [3], PEETRE [9] [10], GRISVARD [5]) e, per $p = 2$, nella teoria delle equazioni differenziali di tipo ellittico del secondo ordine da CAMPANATO [2].

Scopo di questa Nota è quello di mostrare come, utilizzando i risultati di CAMPANATO [2] ed il risultato di interpolazione di STAMPACCHIA [13], si possano dedurre le maggiorazioni in $L^p$ per le derivate delle soluzioni di equazioni ellittiche del 2° ordine. Ci limiteremo, per semplicità, a considerare soluzioni del problema di DIRICHLET per equazioni contenenti solo termini di grado massimo; diciamo però che il procedimento non è legato al tipo particolare di problema e di operatori considerati.

Facciamo osservare che in questo modo le maggiorazioni delle derivate in $L^p$ vengono dedotte, a noi sembra per la prima volta, senza utilizzare il teorema di CALDERON–ZYGMUND sugli integrali singolari. Si includono, così, in uno schema unitario, le maggiorazioni negli spazi di funzioni holderiane [2] con le maggiorazioni in $L^p$.

(*) Questa ricerca è stata parzialmente finanziata da «the United States Air Force» col contratto AF EOAR grant 65-42 attraverso «the European Office of Aerospace Research».

**1.** – Sia $\Omega$ un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $u$ una funzione integrabile in $\Omega$. Per ogni sottoinsieme misurabile $A \subset \Omega$ poniamo

$$u_A = \frac{1}{|A|} \int_A u(t)dt$$

dove con $|A|$ abbiamo indicato la misura secondo LEBESGUE dell'insieme $A$.

Indichiamo con $I(x, r)$ il cubo di centro $x$ e lato $r$ con facce parallele agli iperpiani coordinati e poniamo

$$\Omega(x, r) = \Omega \cap I(x, r).$$

Diciamo che la funzione $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, $\lambda \geq 0$, se

$$[u]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ r > 0}} r^{-\lambda} \int_{\Omega(x,r)} |u(t) - u_{\Omega(x,r)}|^p dt < +\infty. \tag{1.1}$$

La quantità $[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$ è una seminorma in $\mathcal{L}^{p,\lambda}$; come norma si può assumere la seguente:

$$\| u \|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} = \| u \|_{L^p(\Omega)} + [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$$

e ciò rende lo spazio $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ uno spazio di BANACH.

Ovviamente: $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Si vede inoltre che $\mathcal{L}^{p,0}(\Omega)$ è isomorfo a $L^p(\Omega)$ e che

$$L^\infty(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,n}(\Omega). \tag{1.2}$$

Gli spazi $\mathcal{L}^{p,n}(\Omega)$ sono stati caratterizzati in [6] nel caso che $\Omega$ sia un cubo, e risulta che essi non dipendono dall'indice $p$ nel senso che essi sono spazi di BANACH isomorfi.

Osserviamo ora che gli spazi $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ sono invarianti per trasformazioni bilipschitziane nel senso che se $\Omega_1$ e $\Omega_2$ sono due aperti limitati di $\mathbb{R}^n$ e $y = \mathcal{T}(x)$ è una trasformazione bilipschitziana (1) che muta $\Omega_1$ in $\Omega_2$, allora l'applicazione

$$u(y) \longrightarrow v(x) = u(\mathcal{T}(x))$$

è un isomorfismo fra $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega_2)$ e $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega_1)$, (v. ad es. teor. V dell'appendice I di [2]).

(1) Ciò significa che esistono due costanti $m$ e $M$ tali che per ogni $x'$ e $x''$ in $\Omega_1$ si abbia

$$0 < m \leq \frac{|\mathcal{T}(x') - \mathcal{T}(x'')|}{|x' - x''|} \leq M < +\infty.$$

Ne risulta che se $\Omega$ è un aperto che sia immagine bilipschitziana di un cubo, gli spazi $\mathcal{L}^{p,n}(\Omega)$ sono, al variare di $p$, spazi di BANACH isomorfi. Cioè:

$$\mathcal{L}^{p,n}(\Omega) \backsim \mathcal{L}^{1,n}(\Omega) \qquad \forall\ p \geq 1. \tag{1.3}$$

2. - Sia $\Omega$ un cubo e $T$ un operatore lineare definito nella classe $\mathcal{F}$ delle funzioni semplici su $\Omega$. È stato dimostrato in [13] il seguente

TEOREMA I. - *Se per ogni $f \in \mathcal{F}$, si ha*

$$[Tf]_{\mathcal{L}^{1,n}(\Omega)} \leq K_1 \| f \|_{L^\infty(\Omega)} \tag{2.1}$$

*e*

$$[Tf]_{\mathcal{L}^{p,0}(\Omega)} \leq K_2 \| f \|_{L^p(\Omega)} \tag{2.2}$$

*con $K_1$ e $K_2$ costanti e $p \geq 1$, allora per ogni $f$ di $L^q(\Omega)$, $p<q<+\infty$, risulta*

$$\| Tf - (Tf)_\Omega \|_{L^q(\Omega)} \leq \mathcal{K} \| f \|_{L^q(\Omega)} \tag{2.3}$$

*con $\mathcal{K}$ costante opportuna.*

Questo teorema si deduce, come caso particolare, dal teorema 4.1 di [13], quando si ponga, con le notazioni di [13] ([2]), $\mu_2 = n$, $q_2 = p_2 = r = p$ e $p_1 = +\infty$.

Osserviamo che, come si è detto nel n. 1, le norme e le semi norme che intervengono nel teorema I sono trasformate, con applicazioni bilipschitziane, in norme e seminorme equivalenti. Pertanto il teorema I continua a valere se $\Omega$, anzichè un cubo, è l'immagine bilipschitziana di un cubo.

Osserviamo che, come corollario del teorema I, si ha:

COROLLARIO I. - *Se per ogni $f \in \mathcal{F}$ si ha la* (2.1) *ed, invece della* (2.2), *la seguente maggiorazione*:

$$\| Tf \|_{L^p(\Omega)} \leq K_2 \| f \|_{L^p(\Omega)} \tag{2.2'}$$

*dove $K_1$ e $K_2$ sono costanti e $p \geq 1$, allora, per ogni $f$ di $L^q(\Omega)$ con $p \leq q < +\infty$ si ha*

$$\| Tf \|_{L^q(\Omega)} \leq \mathcal{K} \| f \|_{L^q(\Omega)} \tag{2.3'}$$

*con $\mathcal{K}$ costante opportuna.*

([2]) Gli spazi qui indicati con $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ corrispondono agli spazi indicati in [13] con $\mathcal{L}^{(p,n-\lambda)}$.

Infatti la (2.2') implica la (2.2) e quindi vale la (2.3). Da questa segue che

$$\| Tf \|_{L^q(\Omega)} \leq \mathcal{K} \| f \|_{L^q(\Omega)} + |(Tf)_\Omega| \cdot |\Omega|^{\frac{1}{q}}$$

e per la diseguaglianza di HÖLDER e la (2.2') si ha:

$$\begin{aligned} \| Tf \|_{L^q(\Omega)} &\leq \mathcal{K} \| f \|_{L^q} + \| Tf \|_{L^p} |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \mathcal{K} \| f \|_{L^q} + K_2 \| f \|_{L^p} |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq (\mathcal{K} + K_2) \| f \|_{L^q(\Omega)} . \end{aligned}$$

**3.** – Nell'aperto limitato $\Omega$, consideriamo l'operatore differenziale lineare ellittico del secondo ordine:

$$E(u) = \sum_{i,j}^{1\ldots n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}, \quad a_{ij} = a_{ji} \tag{3.1}$$

dove i coefficienti sono funzioni (reali) hölderiane in $\bar{\Omega}$ e verificano la condizione di ellitticità:

$$\nu^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \nu |\xi|^2, \qquad \nu > 0$$

qualunque sia $\xi \in \mathbb{R}^n$ ed $x \in \bar{\Omega}$.

Siano $f_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ $n$ funzioni appartenenti a $L^2(\Omega)$, e sia $u$ la soluzione in $H_0^1(\Omega)$ [3] dell'equazione

$$E(u) = \sum_j (f_j)_{x_j} . \tag{3.2}$$

È ben noto (v. ad es. [7]) che una tale soluzione esiste ed è unica e si ha la maggiorazione

$$\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_i \| u_{x_i} \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \nu^2 \sum_i \| f_i \|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{3.3}$$

In [2] (v. teor. 16.II) è stato dimostrato il seguente risultato

TEOREMA II. – *Se $\Omega$ è di classe $C^{1,\alpha} (\alpha > 0)$ e $f_i \in \mathcal{L}^{2,n}(\Omega)$ allora, esiste una costante $C$, tale che si abbia*

$$\sum_i \| u_{x_i} \|_{\mathcal{L}^{2,n}(\Omega)} \leq C \sum_i \| f_i \|_{\mathcal{L}^{2,n}(\Omega)} . \tag{3.4}$$

(3) $H^1(\Omega)$ è lo spazio delle distribuzioni $u$ tali che $u \in L^2(\Omega)$, e $u_{x_i} \in L^2(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, con la topologia naturale. $H_0^1(\Omega)$ è l'aderenza in $H^1(\Omega)$ delle funzioni indefinitamente derivabili e a supporto compatto in $\Omega$. Il duale forte di $H_0^1(\Omega)$ si indica con $H^{-1}(\Omega)$.

Osserviamo che, per la (1.3) e la (1.2), la (3.4) fornisce, in particolare, la maggiorazione

(3.5) $$\sum_i \| u_{x_i} \|_{\mathfrak{L}^{1,n}(\Omega)} \leq C' \sum_i \| f_i \|_{L^\infty(\Omega)} = C' \sum_i \max_{\bar{\Omega}} | f_i | .$$

Indichiamo con $G$ l'operatore di GREEN relativo al problema di DIRICHLET sopra definito. Esso è un isomorfismo di $H^{-1}(\Omega)$ su $H_0^1(\Omega)$. Se indichiamo con $F$ il vettore $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ si ha: $u = G(F)$.

Indichiamo con $G_{is}$ l'operatore lineare, definito in $L^2(\Omega)$,

(3.6) $$f \longrightarrow G_{is}(f) = \frac{\partial}{\partial x_i} G(F_s)$$

dove $F_s$ è il vettore che ha tutte le componenti nulle tranne l'$s^{ma}$ che è uguale a $f$.

Evidentemente, si ha:

(3.7) $$u_{x_i} = \sum_s G_{is}(f_s) .$$

4. - Senza preoccuparci di raffinare le ipotesi sull'aperto $\Omega$, supponiamo che esso sia di classe $C^{1,\alpha}(\alpha > 0)$ ed immagine bilipschitziana di un cubo.

Allora le maggiorazioni (3.3) e (3.5) assicurano che ogni operatore $G_{is}$ è lineare continuo, non solo da $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, ma anche da $L^\infty(\Omega)$ in $\mathfrak{L}^{1,n}(\Omega)$. Sono pertanto soddisfatte le ipotesi del corollario I con $p = 2$. Si conclude che per ogni $p$, con $2 \leq p < +\infty$, gli operatori $G_{is}$ sono lineari e continui da $L^p(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$. Quindi, per la (3.7), vale la maggiorazione

(4.1) $$\sum_i \| u_{x_i} \|_{L^p(\Omega)} \leq K \sum_i \| f_i \|_{L^p(\Omega)} , \quad 2 \leq p < +\infty .$$

Questa maggiorazione si estende per dualità al caso in cui $1 < p \leq 2$.

5. - Utilizzando la (4.1), si possono ottenere anche le maggiorazioni locali, all'interno, in $L^p$ per le derivate prime delle soluzioni dell'equazione (3.2) decomponendo localmente la soluzione $u$ nella somma $v + w$, con $v$ soluzione di un problema di DIRICHLET con dati nulli al bordo (e qui si sfrutta la (4.1)), e $w$ soluzione di un'equazione ellittica con secondo membro nullo per le quali le maggiorazioni locali sono note.

In modo analogo si può procedere per le maggiorazioni locali, al bordo, di soluzioni di problemi al contorno.

Partendo da queste maggiorazioni locali si possono ottenere maggiorazioni in $L^p$ per le derivate di ordine superiore col procedimento standard dei rapporti incrementali.

Osserviamo d'altra parte che maggiorazioni in $L^p(\Omega)$ per le derivate di ordine superiore della soluzione del problema di DIRICHLET per l'operatore considerato (3.1), quando i coefficienti, il dominio ed il termine noto si suppongono via via più regolari, si possono ottenere anche per interpolazione, come si è fatto nel n. 4 per le derivate prime, sfruttando le maggiorazioni note in $L^2(\Omega)$ ed il teorema 16.II di [2] che fornisce le maggiorazioni in $\mathcal{L}^{1,n}(\Omega)$ per le derivate di ordine superiore.

Si dimostra così che, per $p \geq 2$, l'operatore $G$ è un isomorfismo fra $H^{k,p}(\Omega)$ e $H^{k+2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ quando i coefficienti ed il dominio sono sufficientemente regolari ([4]).

## BIBLIOGRAFIA

[1] S. CAMPANATO, *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Vol. XVII, 1963, pp. 175-188.

[2] — —, *Equazioni ellittiche del II° ordine e spazi* $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}$, in corso di stampa su Annali di Matematica.

[3] S. CAMPANATO e M. K. V. MURTHY, *Una generalizzazione del teorema di Riesz-Thorin*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. XIX, 1965. pp. 87-100.

[4] G. DA PRATO, *Spazi* $\mathcal{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ *e loro proprietà*, in corso di stampa su Annali di Matematica.

[5] P. GRISVARD, *Commutativé de deux foncteurs d'interpolation et application*, Thèse, Paris.

[6] F. JOHN e L. NIRENBERG, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure e Appl. Math., Vol. 14, 1961, pp. 415-426.

[7] E. MAGENES e G. STAMPACCHIA, *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. XII, 1958, pp. 247-358.

[8] G. N. MEYERS, *Mean oscillation over cubes and Holder continuity*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 15, 1964, pp. 717-721.

[9] J. PEETRE, *On convolution operators leaving* $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ *spaces invariant*, in corso di pubblicazione.

([4]) $H^{k,p}(\Omega)$ è lo spazio delle distribuzioni $u$ tali che esse e tutte le derivate fino all'ordine $k$ incluso appartengono a $L^p(\Omega)$.

[10] — —, *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff*, in corso di pubblicazione su Ann. Inst. Fourier.

[11] S. SPANNE, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes*, in corso di stampa su Ann Scuola Norm. Sup. Pisa.

[12] G. STAMPACCHIA, $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$*-Spaces and Interpolation*, Comm. Pure Appl. Math. Vol. XVII, 1964, pp. 293-306.

[13] — —, *The spaces* $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ *and interpolation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. XIX, 1965, pp. 443-462.

*Pervenuta alla Segreteria dell'* U. M. I.
*l'11 ottobre 1965*