Bollettino
Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* Francesca Rivetti-Barbò, Il teorema e il corollario di Gödel, indagine critica, Vita e Pensiero, Milano, 1964 (Ettore Casari)
* W. K. Hayman, Meromorfic functions, Oxford University Press, 1964 (Delfina Roux)
* L. Fuchs, E. T. Schmidt, Proceedings of the Colloquium on Abelian Groups, Académiai Kiadò, Budapest, 1964 (Cesarina Marchionna Tibiletti)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.2, p. 258–266.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_258_0>

RECENSIONI

FRANCESCA RIVETTI - BARBÒ, *Il teorema e il corollario di Gödel, indagine critica*, Vita e Pensiero, Milano 1964, pp. X-66, L. 2000.

Il lavoro in questione può considerarsi il punto di arrivo di una ricerca dell'A. (in corso ormai da molti anni e testimoniata da varie altre pubblicazioni) la quale ha di mira l'esame critico di quei fondamentali risultati ottenuti nel 1931 da quello che senza ombra di dubbio può considerarsi come il massimo logico matematico del nostro secolo: l'austriaco Kurt Gödel.

L'indagine critica dell'A. è ormai giunta in questo lavoro al punto di « provare » che la dimostrazione del teorema di Gödel intorno all'esistenza di enunciati formalmente indecidibili è invalida in due e valida in altre due ipotesi che l'A. ha formulato e inoltre che la dimostrazione del cosiddetto corollario di Gödel intorno alla possibilità di dimostrazioni di noncontraddittorietà è senz'altro invalida.

Va detto che l'A. si premura di avvertire che l'indagine da lei intrapresa ha come scopo « la verifica della validità per la metateoria » (p. 22) con la sottolineatura: « l'indagine è intesa a vagliare la validità della prova non per l'aritmetica bensì per la metateoria » (p. 23).

Il senso dell'espressione « validità per la metateoria » non viene purtroppo precisato in alcun punto del lavoro tuttavia le argomentazioni dell'A. si imperniano su un errore di fondo che le invalida indipendentemente dal livello al quale esse intendano riferirsi: l'errore consistente in una confusione tra simboli e simbolizzati ovvero, in terminologia classica, uno scambio di *suppositiones*.

Al fine di bene illustrare questo punto siamo costretti a dare una sommaria esposizione di alcuni fondamentali momenti della dimostrazione gödeliana (1).

Partiamo da un sistema formale che, per uniformarci alla terminologia dell'autrice, chiameremo **SF** il quale sia in grado di esprimere l'aritmetica. Notiamo che, in particolare, tale sistema formale disporrà di un qualche modo di variabili numeriche **x**, **y**, **z**... (ovvero $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ...) e di cifre, intese queste ultime in senso lato, cioè come quei complessi di simboli che rappresentano numeri determinati. Detto **A** l'alfabeto di questo **SF** istituiamo in qualche modo una corrispondenza biunivoca g tra gli elementi di **A** e un insieme di numeri naturali (positivi) (2). Estendiamo ora questa cor-

(1) Useremo il grassetto per denotare elementi del linguaggio oggetto, come pure operazioni e predicati su tali elementi; useremo invece il corsivo per denotare numeri, funzioni e predicati numerici.

(2) Tale corrispondenza è ovviamente affatto arbitraria. Per favorire il collegamento con l'esposizione della R.-B. conveniamo però almeno che

rispondenza ad una corrispondenza $\bar{g}$ tra l'insieme **P(A)** delle parole in **A** (3) e un insieme di numeri naturali stabilendo che alla parola $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ (con $\sigma_i \in$ **A**) venga assegnato come numero (numero-*G* secondo la terminologia dell'autrice noi diremo invece gödeliano) il prodotto dei primi n numeri primi, all'i-esimo dei quali sia stato dato come esponente il numero associato dalla g a σ_i. Estendiamo infine questa corrispondenza ad una corrispondenza $\bar{\bar{g}}$ tra gli elementi di **P(P(A))** e un insieme di numeri naturali convenendo di associare alla « parola » $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_n$ (con $\mathbf{w}_i \in$ **P(A)**) quale suo gödeliano il prodotto dei primi n numeri primi, all'i-esimo dei quali sia stato dato come esponente il gödeliano associato da g a $\mathbf{w}_i$.

Fatto questo è chiaro che ad ogni eventuale predicato o operazione definita su **A**, **P(A)** e **P(P(A))** risultano automaticamente associati un predicato, rispettivamente una funzione di numeri naturali.

Risulta ora che un gran numero di operazioni e proprietà definite su **A**, **P(A)** e **P(P(A))** e particolarmente importanti dal punto di vista metateorico, sono, intuitivamente parlando, decidibili; ne consegue che i loro corrispettivi numerici saranno funzioni rispettivamente predicati ricorsivi (4).

Decidibile in particolare è la proprietà **E(X)** di certi elementi di **P(A)** di essere una *espressione* (ben formata), o come l'autrice preferisce, un *enunciato* (aperto o chiuso) di **SF**; decidibile è anche la proprietà di certi elementi di **P(P(A))** di costituire una successione finita di espressioni di **SF** e decidibile infine (relativamente a **K**) la relazione $\mathbf{X} D_{\mathbf{K}} \mathbf{Y}$ che sussiste tra una successione finita **X** di espressioni **SF** e una espressione **Y** di **SF** quando la prima è una dimostrazione in **SF** di **Y** a partire dalle espressioni (assunzioni ausiliarie) contenute nell'insieme **K** (5).

Esisterà (6) dunque in particolare un predicato $x \; D_K \; y$ ricorsivo (relativamente a k) il quale sussiste tra due numeri x e y se e solo se $\bar{\bar{g}}^{-1}(x) \; D_{\mathbf{K}} \; \bar{g}^{-1}(y)$, cioè se e solo se x è il gödeliano di una dimostrazione (relativamente a **k**) in **SF** di una espressione il cui gödeliano sia y.

Anche l'operazione di sostituzione diagonale su **y** e cioè $\mathbf{Ss}\left(\mathbf{X}^{\mathbf{y}}_{\mathbf{C(X)}}\right)$ la quale, applicata all'espressione **X**, ci dà come risultato l'espressione ottenuta da **X** sostituendo ogni occorrenza libera di **y** con la cifra **C(X)** che rappresenta nel sistema formale il gödeliano dell'espressione **X** è chiaramente effettiva. Esisterà dunque una funzione ricorsiva (primitiva) $s(x)$ la quale per ogni gödeliano di espressione x ci dà il gödeliano di $\mathbf{Ss}\left(\bar{g}^{-1}(x)^{\mathbf{y}}_{\mathbf{C}(\bar{g}^{-1}(x))}\right)$

essa sia tale che per esempio alla prima e alla seconda variabile aritmetiche qui rappresentate con '**x**' e '**y**' corrispondano rispettivamente i numeri 17 e 19.

(3) **P(A)** è cioè il monoide libero generato da **A**.

(4) Al fine di semplificare le nostre successive argomentazioni preferiamo qui e nel seguito servirci sempre del concetto di ricorsività (generale), trascurando dunque il fatto che, in realtà, in molti casi, la sola ricorsività primitiva sarebbe sufficiente.

(5) Abbiamo preferito questo semplice ragionamento, la cui validità dipende però ovviamente dalla cosiddetta tesi di Church, a quello usuale che ne è invece indipendente e che consiste nella costruzione in parallelo delle definizioni delle operazioni e predicati metateoreci e dei corrispettivi aritmetici. Ciò perchè quest'ultima via è ovviamente assai più lunga e, d'altra parte, ogni lettore che ne abbia voglia, può senza difficoltà percorrerla servendosi di una qualsiasi delle numerosissime esposizioni della tecnica di aritmetizzazione della sintassi.

(6) Nel seguito useremo a questo proposito il termine di K-dimostrazione.

ossia, per ogni x che sia gödeliano di un'espressione $\mathbf{X}$ la s ci dà il gödeliano dell'espressione ottenuta da $\mathbf{X}$ sostituendo in essa la variabile $\mathbf{y}$ con la cifra che rappresenta il gödeliano di $\mathbf{X}$.

Noti teoremi sulla ricorsività ci consentono ora di affermare che, preso un K determinato che sia ricorsivo, la relazione xQy, che per definizione sussiste tra i numeri x e y se e solo se tra essi non sussiste la relazione $x D_K s(y)$, è ricorsiva.

Si può ora dimostrare che tutte le funzioni e i predicati ricorsivi sono *formalmente esprimibili* in **SF** nel seguente preciso senso:

Se R è un predicato ricorsivo n adico, allora esiste un'espressione $\mathbf{X}$ la quale contiene libere tutte e solo le variabili $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ ed è tale che se $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_n$ sono le cifre di **SF** che rappresentano i numeri $m_1, \ldots, m_n$ e $\mathbf{Ss}\left(\mathbf{X}^{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}_{\mathbf{m}_1 \ldots \mathbf{m}_n}\right)$ è l'espressione che si ottiene da $\mathbf{X}$ sostituendo in essa ogni occorrenza libera di $\mathbf{x}_i$ con $\mathbf{m}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ allora:

1. Se R sussiste tra i numeri $m_1, \ldots, m_n$, l'espressione $\mathbf{Ss}\left(\mathbf{X}^{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}_{\mathbf{m}_1 \ldots \mathbf{m}_n}\right)$ è dimostrabile;

2. Se R non sussiste tra i numeri $m_1, \ldots, m_n$, l'espressione $\mathbf{Ss}\left(\mathbf{X}^{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}_{\mathbf{m}_1 \ldots \mathbf{m}_n}\right)$ è refutabile ossia è dimostrabile l'espressione $\neg \mathbf{Ss}\left(\mathbf{X}^{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}_{\mathbf{m}_1 \ldots \mathbf{m}_n}\right)$ dove $\neg$ è la negazione in **SF**.

In virtù della ricorsività di Q esiste dunque una espressione di **SF** contenente libere le sole variabili $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ la quale *esprime formalmente* Q. Sia $\mathbf{Q}$ una tale espressione.

Consideriamo ora l'espressione ottenuta quantificando universalmente la $\mathbf{Q}$ rispetto a $\mathbf{x}$ e cioè

$$(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Questa ha un suo gödeliano, diciamo p. Prendiamo ora l'espressione

$$\mathbf{I}^*: \qquad (\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

e cioè $\mathbf{Ss}\left((\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}}\right)$ o, se si preferisce $\mathbf{Ss}\left((\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbf{C}((\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))}\right)$. È ovvio, in base alla definizione della funzione $s(x)$, che tale espressione ha come gödeliano $s(p)$; $\mathbf{I}^*$ è la famosa frase della quale, sotto opportune ipotesi di non-contraddittorietà, può dimostrarsi la indecidibilità formale.

In particolare si può dimostrare che: a) supposto $\mathbf{SF_K}$ non-contraddittorio, $\mathbf{I}^*$ è **K**-indimostrabile e inoltre b) supposto $\mathbf{SF_K}$ ω-non-contraddittorio (e cioè tale che per nessuna espressione $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ è possibile dimostrare sia $\neg$ $(\mathbf{x})\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ sia, per ogni particolare cifra $\mathbf{q}$, $\mathbf{Z}(\mathbf{q})$) la $\mathbf{I}^*$ è **K**-irrefutabile.

Per desiderio di completezza diamo qui brevemente questa dimostrazione.

a) Supponiamo che $(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sia **K**-dimostrabile. Sia $\mathbf{Y}$ una sua **K**-dimostrazione. Vale $\mathbf{Y}\mathbf{D_K}(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ e dunque: $\overline{\overline{g}}(\mathbf{Y})D_K\ \overline{g}((\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$. Ossia, tenuto conto che $g(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = s(p)$, vale $\overline{\overline{g}}(\mathbf{Y})D_K s(p)$ e cioè non vale $\overline{\overline{g}}(\mathbf{Y})Qp$. In virtù della *rappresentabilità formale* di Q mediante $\mathbf{Q}$, l'espressione $\neg \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, dove $\mathbf{q}$ è la cifra che rappresenta in **SF** il numero $\overline{\overline{g}}(\mathbf{Y})$, è **K**-dimostrabile. Se $\neg \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ è **K**-dimostrabile, allora, per le leggi elementari della logica, è **K**-dimostrabile anche $(E\ \mathbf{x}) \neg \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Sempre per le leggi elementari della logica allora è anche **K**-dimostrabile $\neg$ $(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Concludendo: se $(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ è **K**-dimostrabile, allora è **K**-dimostrabile anche $\neg$ $(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ il che, supposto $\mathbf{SF_K}$ non-contraddittorio è impossibile.

b) Supponiamo dunque che $(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ sia K-refutabile e cioè sia K-dimostrabile $\neg(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. A meno di una contraddittorietà di $\mathbf{SF_K}$, $(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ non è in tal caso K-dimostrabile; per ogni successione finita di espressioni $\mathbf{Y}$ avremo quindi: non $\mathbf{YD_K}\,(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. In virtù della corrispondenza: per ogni $\mathbf{Y}$: non $\overline{\overline{g}}(\mathbf{Y})\,D_K\,s(p)$.

A fortiori vale che per ogni numero q: non $qD_K\,s(p)$; ovvero: per ogni q vale qQp. In virtù della rappresentabilità formale di Q attraverso $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ è K-dimostrabile per ogni cifra $\mathbf{q}$. Concludendo: se $\neg(x)\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ è K dimostrabile, allora, per ogni $\mathbf{q}$, è K-dimostrabile $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ il che, a meno della ω contraddittorietà di $\mathbf{SF_K}$, è impossibile (8).

Non pare che questa dimostrazione venga direttamente contestata dall'Autrice; quello che essa contesta è, come s'è già detto, che una tale dimostrazione « valga per la metateoria ». Lasciamo naturalmente da parte il problema relativo al senso di questa affermazione e vediamo che cosa l'A. effettivamente fa. Essa ricerca i significati aritmetico I^* e metateorico **I** di questa frase. Orbene, il significato aritmetico di $(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ è il seguente: per ogni x: xQp e cioè, tenuto conto della definizione di Q, I^*: *per ogni* x: *non* $xD_K\,s(p)$.

In virtù della corrispondenza tra aritmetica e metateoria abbiamo, equivalentemente, il seguente enunciato metateorico per ogni x: non $\overline{\overline{g}}^{-1}(x)$ $\mathbf{D_K}$ $\overline{g}^{-1}(s(p))$ ossia
per ogni x: la successione finita di espressioni di gödeliano x non è una K-dimostrazione della espressione di gödeliano $s(p)$.

Tenuto conto del fatto che: 1) ogni successione finita di espressioni ha un gödeliano; 2) l'espressione di gödeliano $s(p)$ è $(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ si ha equivalentemente

$$\mathbf{I}\text{: per ogni } \mathbf{X}\text{: non } \mathbf{XD_K}\ (\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})).$$

La proposizione metateorica **I** equivalente a quella aritmetica espressa da I^* ovvero, come s'usa dire, la proposizione metateorica *rappresentata* da I^* è l'affermazione della indimostrabilità di

Tutto sembra chiaro e pacifico ma l'A. non è del parere. Ella pensa infatti che quel che entra in gioco nella **I** non è quel certo complesso di simboli di **SF** che noi denotiamo qui con il suo nome metalinguistico ma il significato di una tale espressione! Ella pensa cioè che nella **I** non entra in gioco $(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ ma il suo significato.

Che, se così fosse, si darebbe immediatamente l'avvio ad un regresso all'infinito non occorre certo scoprirlo attraverso le lunghe e faticose pagine (30-35) che l'A. dedica alla cosa: Basta pensare che allora nella **I**, al posto di '$(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$' si potrebbe scrivere **I** stessa ottenendo successivamente

$\mathbf{I}_1$: per ogni $\mathbf{X}$: non $\mathbf{XD_K}$ (per ogni $\mathbf{X}$: non $\mathbf{XD_K}$ $((\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$).

$\mathbf{I}_2$: per ogni $\mathbf{X}$: non $\mathbf{XD_K}$ (per ogni $\mathbf{X}$: non $\mathbf{XD_K}$ (per ogni $\mathbf{X}$: non $\mathbf{XD_K}$ $((\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$).

e così via.

L'equivoco in questione emerge in tutta evidenza là dove l'A. imprende a « invalidare » l'argomentazione di Gödel nella prima di quattro sue ipotesi (dette rispettivamente metateorica, aritmetica, mista e mista ridotta e che

(7) Ricordiamo che il risultato della sostituzione in una espressione di una variabile che in tale espressione non figura libera è l'espressione stessa.

(8) Si noti che ovviamente la dimostrazione di b) può venir semplificata accettando già il risultato di a).

non ci sembra valga la pena di riportare in dettaglio)attraverso l'affermazione che l'enunciato metateorico rappresentato dalla I^* non è ben formato in quanto la ricerca « dell'argomento dell'enunciato metateorico » da essa rappresentato porta ad un regresso all'infinito.

L'argomentazione dell'Autrice è duplice conformemente alla sua distinzione tra un metalinguaggio del sistema formale ed un metalinguaggio del sistema deduttivo da quello espresso.

Limitiamoci allo studio del primo (9) che l'autrice chiama $_{sf}\mathbf{I}$.

Riportiamo (10): « ... nell'enunciato metalinguistico $_{sf}\mathbf{I}$ rappresentato dall'enunciato aritmetico espresso nel **SF** da **I***, l'argomento del predicato $(\mathbf{X})\overline{\mathbf{XDY}}$ è $\mathbf{Ss}\left(\mathbf{P}^0\,\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{p}}\right)$; il risultato di questa sostituzione è un enunciato chiuso del **SF**, [perchè il predicato $\mathbf{P}^0$ (del **SF**) esprime il predicato aritmetico P^0 (del La) i cui possibili argomenti sono numeri; sicchè la variabile **y** di $\mathbf{P}^0$ è legittimamente sostituita dalla cifra **p** che esprime un dato numero; perciò] $\mathbf{Ss}\left(\mathbf{P}^0\,\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{p}}\right)$ designa [l'espressione] nel **SF** [di] un enunciato aritmetico chiuso ben formato; e questa espressione parrebbe essere possibile argomento del predicato $(\mathrm{X})(\overline{\mathrm{XDY}})$. [Senonchè] il risultato della $\mathbf{Ss}\left(\mathbf{P}^0\,\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{p}}\right)$ è la **I*** [che esprime I^* che rappresenta $_{sf}\mathbf{I}$; per cui si ripresenta, anche per questa occorrenza $_{sf}\mathbf{I}$ (come argomento di $_{sf}\mathbf{I}$) la medesima questione cui si è or ora risposto per l'altra occorrenza di $_{sf}\mathbf{I}$; e la risposta avvia, anche qui, al medesimo (3) regresso all'infinito » (11)]. Omettendo le parti da noi messe tra parentesi quadre e sostituendo « parrebbe essere » con « è », il passo riflette, seppure in modo ancora imperfetto, la vera situazione. Le parti tra parentesi sono invece nettamente erronee; ma mentre la prima di esse non compromette la verità dell'affermazione che ne dipende la quale è vera per ragioni diverse si da quelle supposte dall'A. ma pur sempre valide (infatti $\mathbf{Ss}\left(\mathbf{P}^0\,\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{P}}\right)$ è chiusa non perchè « esprime etc. etc. », ma solo perchè $\mathbf{P}^0$ contiene, per costruzione, una unica variabile, la **y** e questa è stata eliminata dalla sostituzione) la seconda parte e cioè quella che comincia con « che esprime I^* ... » è chiaramente fallace e illumina ci pare sufficientemente proprio la radice dell'errore generale della Rivetti.

Riassumendo: l'errore di fondo di tutta la confutazione risiede nel fatto di scambiare un simbolo con il suo significato o, se si vuole, nel ritenere che la relazione di dimostrabilità venga predicata dei significati dei simboli e non dei simboli stessi.

Il sospetto che qualcosa non quadrasse in queste critiche sembra peraltro essere affiorato alla mente dell'A. la quale a p. 25 si premura di precisare che essa si serve del *concetto logico* di *deduzione* a proposito del quale però ci fornisce solo questa indicazione: la deduzione logica « sussiste se e solo se: posto che l'antecedente sia vero è necessariamente vero anche il conseguente ».

(9) La stessa confusione è visibile nel secondo; si vedano le due ultime definizioni di p. 31 dove ad argomento di **D** si mette: non $(x)\ D_K\ s(p)$! Per la stessa confusione e per il suo ruolo nella invalidazione del corollario di Gödel si vedano le pp. dal 45 in poi per es. le ultime due righe di p. 53.

(10) Ricordiamo che $\mathbf{P}^0$ è $(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e che inoltre la sopralineatura è una convenzione simbolica per la negazione metalinguistica. Le parentesi quadre sono naturalmente nostre.

(11) Il riferimento è al caso dell'enunciato del metalinguaggio deduttivo che l'A. ha trattato nella pagina precedente.

A questo riguardo devono farsi due osservazioni almeno.

La prima è questa. Anche accettando la caratterizzazione testè ricordata del concetto di deduzione logica possa venir sensatamente precisata nella direzione contenutistica sottintesa dall'A., resta tuttavia fermo il fatto che quando Gödel parla di deduzione o dimostrazione o derivazione egli intende sempre e solo riferirsi alle versioni sintattiche di questi concetti. Tentare di interpretarlo altrimenti non solo è, com'è ovvio, illegittimo ma, *tenuto conto del fatto che l'aritmetizzazione* — che l'A. accetta pari pari — *è stata istituita solo per simboli e complessi di simboli, anche materialmente impossibile.*

La seconda è quest'altra: se per caso la interpretazione da darsi alla sua caratterizzazione è quella secondo cui deduzione logica va intesa come quella oggi chiamata relazione semantica di conseguenza, allora:

1) Lo scambio prima rilevato resta illegittimo; anche questa relazione si predica solo di serie di simboli, facendo sì, riferimento ai possibili significati di questi, ma essa ha sempre e soltanto la forma:

la tal serie di simboli è una conseguenza della tal'altra serie di simboli se e solo se non può darsi il caso che la prima sia verificata e la seconda falsificata.

2) Non solo una siffatta relazione non corrisponde affatto a quella sintattica usata da Gödel, ma, come l'autrice non può non sapere, si dà addirittura il caso che il teorema di Gödel possa venir opportunamente trasformato in modo da affermare precisamente che, sotto opportune condizioni (verificate nel caso del sistema formale in discussione), la relazione sintattica di deducibilità è *essenzialmente* e cioè in modo non eliminabile più debole di quella semantica.

Ci siamo limitati a discutere solo il punto centrale della argomentazione della Rivetti trascurando le altre numerose inesattezze e confusioni rinvenibili qua e là nel lavoro. Tra queste una almeno ci pare degna di essere conosciuta. A p. 25 a proposito di quel concetto di deduzione logica che abbiamo finora discusso si legge: « L'eventuale contemporanea deducibilità e confutabilità di un enunciato aperto potrebbe dimostrare solo che i due enunciati chiusi ottenuti con la particolarizzazione (dell'enunciato stesso e della sua negazione) sono ambedue veri ». Da ciò, seguirebbe che quando si fosse dimostrato, sia che x è un numero primo sia che x non è un numero primo, non si sarebbe affatto dedotta una contraddizione ma un doppio teorema di esistenza: esistono numeri primi ed esistono numeri non primi!

Certo, a questo punto, è difficile meravigliarsi del fatto che a chi ha della contraddittorietà una visione così personale e singolare possano riuscire ostiche e persino fallaci le argomentazioni trovate da Gödel intorno alla possibilità o meno di una dimostrazione di non-contraddittorietà.

Un'ultima osservazione: il teorema di Gödel è oggi ottenibile come *corollario* di un notevole numero di teoremi successivamente dimostrati. Prima di procedere ad una confutazione generale dei risultati messi assieme faticosamente negli ultimi decenni da Church, Rosser, Turing, Kleene, Markov, Novikov, Post etc. etc. è bene riflettere a lungo.

Perchè, tra l'altro, non ci pare giusto che lo sforzo di aggiornamento e reinserimento della nostra logica nel discorso internazionale sull'argomento, sforzo al quale la stessa Rivetti-Barbò ha lodevolmente contribuito, ad esempio, mettendo a disposizione del lettore italiano la traduzione della fondamentale memoria di Tarski, venga sul nascere frustrato dalla diffusione di troppo peregrine confutazioni.

ETTORE CASARI

W. K. HAYMAN, *Meromorfic functions*. Oxford Univ. Pres, 1964, XIV+191 pp., 63 s. Oxford Mathematical Monographs.

Nella prima parte di questo volume (cap. I-IV) viene sviluppata la teoria di R. Nevanlinna sui valori eccezionali di una funzione meromorfa: in particolare nei capitoli I e II viene esposta la teoria classica e nei capitoli III e IV vengono presentati i risultati più recenti (alcuni dei quali dovuti all'A. e non pubblicati altrove). Il cap. V è dedicato alla cosidetta teoria di Ahlfors, che è per molti aspetti simile e con risultati connessi a quella di Nevanlinna. Il VI e ultimo capitolo riguarda le proprietà specifiche delle funzioni meromorfe nel cerchio di raggio 1. Nel complesso, si tratta di una monografia molto pregevole riguardante argomenti che hanno avuto recentemente un notevole sviluppo, corredata da una bibliografia che si estende fino all'anno 1962.

I principali risultati sono riassunti e messi in evidenza in un'ampia introduzione che, assieme a numerosi esempi e ai paragrafi introduttivi e conclusivi dei vari capitoli, tende a facilitare la lettura dell'opera, non sempre agevole a causa della lunghezza e complessità di alcuni dei procedimenti dimostrativi.

Veniamo ora a illustrare più diffusamente il contenuto di ogni capitolo.

Sia $f(z)$ una funzione meromorfa non costante nel piano complesso z e sia $n\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = n(r, a)$ il numero dei poli di $1/(f(z)-a)$ nel cerchio $|z|<r$. Consideriamo le funzioni

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = N(r, a) = \int_0^r \frac{n(t, a)}{t}\, dt$$

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = m(r, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{1}{f(re^{i\theta}-a)}\right| d\theta :$$

$N(r, a)$ misura la densità delle radici di $f(z)=a$ in prossimità di $z=\infty$; $m(r, a)$ misura l'intensità della convergenza in media di $f(z)$ verso il valore a per $r \to +\infty$.

La somma

$$N(r, f) + m(r, f) = T(r, f) = T(r)$$

viene chiamata *funzione caratteristica* di $f(z)$ (secondo Nevalinna).

Nel primo capitolo vengono presentate varie proprietà delle funzioni meromorfe connesse alla funzione caratteristica, in particolare il *primo teorema fondamentale* di Nevanlinna

$$T(r) = N(r, a) + m(r, a) + 0(1):$$

in forza di esso la somma $N(r, a) + m(r, a)$ risulta sostanzialmente indipendente da a per grandi valori di r. Viene poi illustrata la rappresentazione di una funzione meromorfa sotto forma di un prodotto infinito che ne mette in evidenza gli zeri e i poli.

Il secondo capitolo contiene il teorema chiave della teoria: il *secondo teorema fondamentale* di Nevanlinna, che generalizza il celebre teorema di Picard sui valori eccezionali delle funzioni intere. Il secondo teorema fondamentale afferma che nella somma $n(r, a) + m(r, a)$ il termine preponderante è, di solito, il primo (e quindi l'equazione $f(z)=a$ ha, di solito,

il massimo numero di radici compatibile con il primo teorema fondamentale): infatti risulta

$$\varliminf \frac{m(r, a)}{T(r)} = 1 - \varlimsup \frac{N(r, a)}{T(r)} = 0$$

salvo al più per una infinità numerabile di valori *a eccezionali*. Inoltre, la somma dei *difetti*

$$\delta(a) = \varliminf \frac{m(r, a)}{T(r)}$$

dei valori eccezionali non può superare due.

Seguono numerosi esempi e applicazioni del secondo teorema fondamentale a varie questioni (p.e. quella dei punti fissi di una funzione intera).

Il terzo capitolo si occupa del problema dei valori eccezionali delle derivate successive di una funzione meromorfa. In particolare si dimostra che per la derivata di ordine l vale la limitazione

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(a) \leqq 1 + \frac{1}{l+1}$$

e quindi $f^{(l)}(z)$ deve assumere infinite volte qualunque valore finito, uno al più eccettuato. I risultati, (alcuni dei quali, come p.e. quello testè segnalato, dell'A.) sono fondati su precedenti lavori di Milloux.

Nel IV capitolo sono raccolte ulteriori informazioni sull'insieme dei valori eccezionali e sulla valutazione dei loro difetti in relazione all'ordine della funzione $f(z)$: essendo i risultati recenti sull'argomento molto numerosi, l'A. si limita ai più significativi. Viene anche illustrato un metodo, dovuto ad A. A. Gol'dberg, per la costruzione di funzioni meromorfe con difetti assegnati. Anche in questo capitolo i contributi personali dell'A. sono notevoli.

Nel cap. V viene trattata la teoria di L. V. Ahlfors. Sia $f(z)$ meromorfa non costante nel cerchio $|z| < r$ e si consideri la rappresentazione conforme $w = f(z)$ dei punti di tale cerchio sulla sfera S di Riemann. Sia D un dominio su S: ci si chiede quante volte tale dominio viene coperto dalla immagine di $|z| < r$ data da $w = f(z)$. Sia D' un sub-dominio di $|z| < r$ rappresentato conformemente da $w = f(z)$ su D con una corrispondenza $(p,1) : D'$ viene chiamato *isola* su D di molteplicità p. Gli sviluppi della teoria sono di carattere prevalentemente geometrico e richiedono nozioni approfondite di topologia delle superficie. I risultati sono molto espressivi e hanno analogie (non soltanto formali) con quelli di Nevanlinna. La trattazione culmina nel cosiddetto *teorema delle cinque isole*: esso afferma che, assegnati sulla sfera di Riemann q domini semplicemente connessi e disgiunti, $f(z)$ ha (sotto certe condizioni) un'isola su almeno uno di essi se $q \geqq 3$ e un'isola di molteplicità uno su almeno uno di essi se $q \geqq 5$.

Buona parte dei risultati dei primi cinque capitoli può essere estesa, senza particolari difficoltà, a funzioni meromorfe nel cerchio $|z| < 1$, purchè $T(r)$ cresca abbastanza rapidamente per $r \to 1-$. Esistono tuttavia proprietà specifiche delle funzioni meromorfe nel cerchio unità che non hanno l'analoga per le funzioni meromorfe in tutto il piano: a queste proprietà è dedicato l'ultimo capitolo. In esso, fra l'altro, si sviluppa la teoria di certe famiglie di funzioni normali nel cerchio unità, ottenendo, come casi particolari, alcuni teoremi classici e si studiano le funzioni meromorfe a caratteristica limitata nel cerchio $|z| < 1$.

DELFINA ROUX

L. FUCHS, E. T. SCHMIDT, *Proceedings of the Colloquium on Abelian Groups*, Akadémiai Kiadò, Budapest, 1964.

Nel settembre 1963 a Tihany (Ungheria) si è svolto un convegno sulla « Teoria dei gruppi abeliani » organizzato dall'Accademia delle Scienze Ungherese e dalla Società Matematica J. Bolyai con il patrocinio dell'Unione Matematica Internazionale.

In tale Convegno sono stati discussi importanti aspetti dei problemi strutturali e dei metodi omologici relativi ai gruppi abeliani.

Nel presente volume sono stati raccolti (per opera del Comitato organizzatore ed in particolare da L. Fuchs ed E. T. Schmidt) quegli studi esposti nel suddetto Convegno che in generale non sono stati pubblicati altrove.

I lavori raccolti sono i seguenti:

R. A. Beaumont, R. S. Pierce - *Quasi-isomorfismo di p-gruppi.*

B. Charles - *Metodi topologici nella teoria dei gruppi abeliani.*

A. L. S. Corner - *Su una congettura di Pierce riguardante le decomposizioni dirette di gruppi abeliani.*

V. Dlab - *Una generalizzazione di relazioni di dipendenza.*

E. Fried - *Sui sottogruppi di un gruppo abeliano che sono ideali in ogni anello.*

L. Fuchs - *Alcune generalizzazioni delle sequenze esatte riguardanti omomorfismi ed estensioni.*

J. de Grott - *Gruppi addittivi di funzioni valutate intere su spazi topologici.*

Kin-ya Honda - *Sulla struttura dei p-gruppi Abeliani.*

J. M. Jrwin, S. A. Khabbaz - *Sui sottogruppi generatori di gruppi abeliani.*

H. Leptin - *Una osservazione sugli automorfismi dei p-gruppi abeliani.*

F. Loonstra - *A-ordinamento del gruppo Ext (B, A).*

R. J. Nunke - *Sulla struttura di Tor (A, B) dei gruppi abeliani A e B.*

R. S. Pierce - *Anelli di endomorfismi di gruppi abeliani primari.*

A. D. Sands - *Fattorizzazione di gruppi ciclici.*

E. A. Walker - *Categorie quoziente e quasi-isomorfismi di gruppi abeliani.*

Non potendo ovviamente scendere a particolari sui precedenti lavori, tutti di tipo essenzialmente specialistico, aggiungiamo solo qualche osservazione di carattere generale.

Fra le questioni trattate alcune stanno strettamente nell'ambito nella Teoria dei gruppi, riferendosi soprattutto a problemi di decomposizione e di struttura dei gruppi abeliani, dei loro omomorfismi e delle loro estensioni; altre mettono in evidenza legami ed applicazioni in relazione all'Algebra in generale (per esempio alla Teoria degli anelli) ed alla Topologia.

È da notare che molto spesso vengono utilizzati metodi topologici per trattare questioni a prima vista puramente algebriche.

Certamente il presente volume raccoglie contributi importanti che non possono essere ignorati da chi si occupa della Teoria dei gruppi Abeliani e dei suoi legami con la Topologia.

CESARINA MARCHIONNA TIBILETTI