Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Kàrteszi

L'introduzione alla geometria del piano grafico finito.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.2, p. 251–257.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_251_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

L'introduzione alla geometria del piano grafico finito

FRANCESCO KÀRTESZI (Budapest)

Sunto. - *Si mostra come gli elementi della geometria del piano grafico finito si possano introdurre prima degli studi di algebra moderna.*

Supponendo che gli studenti non sappiano d'algebra più di quello che contiene il programma dei licei, ma di geometria ne sappiano già di più: conoscono gli elementi all'infinito e sappiano servirsi correttamente del piano proiettivo reale. Basta conoscere che questo piano ha le proprietà:

i) Vi è una e una sola retta appartenente a (incidente a) due punti distinti.

ii) Vi è almeno un punto appartenente a due rette distinte.

iii) Esiste una quaterna di punti a tre a tre non allineati.

In tale circostanza l'autore — in via d'esperimento — più volte ha fatto conoscere l'essenza della « Geometria del piano grafico finito » nel modo che qui segue. Lo scopo non è raggiungere una certa totalità, ma introdurre il metodo assiomatico, conseguendo qualche proposta didattica di Z. KRYGOWSKA [1].

1. - Esauriente irregolarissima parte del poligono regolare.

Consideriamo un N-agono regolare, dove sia $N = n^2 + n + 1$, ed n è un numero naturale. (La figura 1. rappresenta il caso $n = 4$, cioè $N = 21$). Denotiamo con p_1, p_2, . . ., p_n i vertici di que-questo poligono Σ.

I segmenti che congiungono due dei vertici di Σ — secondo le lunghezze di essi — si dividono in classi diverse di numero

$$M = \frac{1}{2}(N - 1) = \frac{1}{2}(n + 1)n = \binom{n+1}{2}.$$

Consideriamo ora $n + 1$ punti a tre a tre non allineati. Questi punti (come estremi del segmento) a due a due individuano segmenti diversi di numero $(n + 1)n/2$. È possibile che tutte le lunghezze di essi siano anche distinte. In tal caso — dal punto di vista metrico — il sistema degli $n + 1$ punti è un sistema *ir-*

regolarissimo. Se tutti i questi punti sono vertici di Σ, allora formano una *esauriente irregolarissima parte di* Σ, ovvero per brevità: un *r-poligono di* Σ. (Nel caso della fig. 1 il pentagono

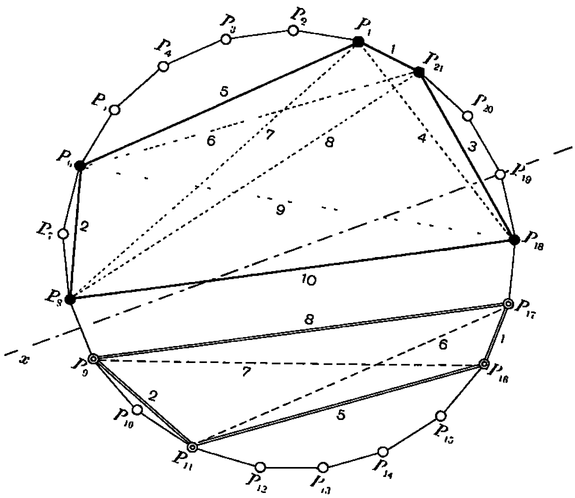

Fig. 1

$r_1 = p_1 p_6 p_8 p_{18} p_{21}$ è un r–poligono di $p_1 p_2 \dots p_{21}$.) L'attributo «esauriente« significa che $n+2$ vertici di Σ non possono formare una parte «irregolarissima»; cioè l'insieme dei segmenti determinanti dalle coppie dei detti $n+2$ vertici contiene (almeno) due della stessa lunghezza.

Nei casi $n = 2, 3, 4, 5$ non è difficile trovare una esauriente irregolarissima parte di Σ, se consideriamo che cosa significa questa denominazione. Se $n = 6$, allora non esiste una esauriente irregolarissima parte di Σ. Cioè considerando 7 vertici qualunque di un poligono regolare di 43-lati, questi vertici stendono 21 segmenti, ma — secondo lughezza — non sono tutti differenti. Quest'ultima affermazione è verificabile senza difficoltà, per mezzo di un ragionamento combinatorio-geometrico elementare. (Ma essendo lunga la discussione, qui la tralasciamo).

Ora si presenta in modo naturale un problema: trovare un metodo profondo e generale per deteminare un r–poligono di Σ, se n è un numero prefissato. [2] (Non ci soffermiamo qui su questo argomento nè su altre questioni che sono adatte a svegliare l'interesse per l'«Algebra moderna». soltanto menzioniamo questi opportunità).

Dopo che abbiamo trovato un esempio — come la fig. 1 — per studiare le proprietà di r–poligoni di un Σ prefissato, allora si possono scorgere le seguenti.

Abbreviando si denoti il punto p_k con k. Consideriamo uno uno degli r–poigoui che ha il punto 1 come vertice; per esempio, nella fig. 1, sia il poligono

$$\gamma_1 = \{1, 6, 18, 21\}.$$

Consideriamo ora le rotazioni attorno al centro di Σ di ampiezza $k\omega$, dove $\omega = 2\pi / N$ e

$$k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Queste rotazioni mutano il poligono r_1 rispettivamente in poligoni $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Abbreviando. sia indicato il poligono r_k con k'. In tal modo è stabilito una corrispondenza biunivoca

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ 1' & 2' & \cdots & N' \end{pmatrix}$$

fra i due insiemi $\boldsymbol{P} = \{1, 2, \ldots, N\}$ e $\boldsymbol{R} = \{1', 2', \ldots, N'\}$. La corrispondenza δ si chiamerà *dualità*.

Il legame fra $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ è caratterizzabile dalle proprietà:

a) – *Vi è uno ed uno solo poligono r che ha due vertici prefissati di* Σ.

b) – *Vi è almeno un vertice di* Σ *il quale appartiene a due r–poligoni fissati.*

c) – *Esiste una quaterna di vertici di* Σ *tre a tre non appartenenti ad un r–poligono.*

Per provare queste proposizioni, anzitutto consideriamo un triangolo appartenente ad un r–poligono — per esempio nella figura 1 il triangolo $\{1, 6, 8\}$ — e un'assse di simmetria che passa per uno dei vertici di Σ — per esempio nella fig. 1 la retta x che passa per 19 —. La simmetria ortogonale all'asse x muta il triangolo detto $\{i, j, h\}$ in un triangolo $\{k, l, m\}$ — nella figura $\{1, 6, 8\} \to \{16, 11, 9\}$ — Così è chiaro il

LEMMA: *Non c'è nessuna rotazione (intorno al centro di* Σ*) di ampiezza* $k\omega$ *che muta* $\{i, j, h\}$ *in* $\{k, l, m\}$.

Ora per provare le proposizioni *a*. *b*, *c* ci richiamiamo alle orientazioni dei poligoni in questione ed al lemma. Così seguono in ordine:

a) Esiste una coppia di vertici di r_1 che determina un segmento uguale a quello che appartiene ai vertici prefissati di Σ.

Esiste una ed — in virtù del lemma e della orientazione di r_1 — una sola rotazione $(k-1)\omega$ che muta il primo segmento nell'ultimo. Dunque r_k dimostra la proposizione *a*).

b) Basta provare che r_1 e r_k $(k \neq 1)$ hanno un vertice comune. Per mezzo dei vertici di r_1 è determinato un segmento di lughezza «k» o «$N-k$» secondo che $k \leq N$ o $k > N$. In ogni caso la rotazione muta r_1 in r_k e muta it primo estremo di questo segmento nell'altro. Dunque quest'ultimo estremo appartiene ugualmente ad r_1 e r_k come vertici di essi.

c) Se $n-2$, allora il poligono regolare $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ha la parte $r_1 = \{1, 2, 4\}$ come un r-poligono. La quaterna $\{1, 3, 4, 5\}$ soddisfa la proposizione *c*).

Se $n > 2$, allora sia una parte qualunqne di r_1 la quaterna $\{i, j, h, k\}$ — nella figura $\{1, 6, 8, 21\}$ — e un asse di simmetria ortogonale sia la retta x passante per un vertice di Σ — nella figura x passa per il punto 19 —. La simmetria muta la quaterna detta in una quaterna antiorientata ed appartenente a Σ — nella figura $\{16, 11, 9, 17\}$ —. In virtù del lemma, quest'ultima quaterna soddisfa la proposizione *c*).

Per mezzo di una tabella di N righe ed altrettante colonne si può esprimere in altro modo il legame fra i due insiemi $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{R}$.

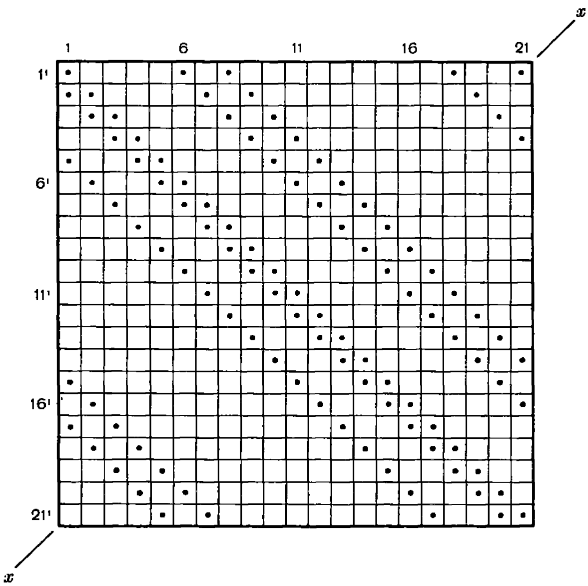

Fig. 2

La fig. 2 corrisponde alla fig. 1 La riga d'indice k' — si potrebbe scrivere soltanto k — corrisponde al poligono r_k. La colonna d'indice l corrisponde al vertice p_l. Il segno « • » nella posizione (k', l) della tabella — si potrebbe scrivere senza inconvenienti (k, l) — significa che il punto p_l è vertice del poligono r_k. (Cioè « • » è il segno dell'appartenenza). La tabella è simmetrica rispetto alla diagonale x. Questa simmetria corrisponde a δ (dualità).

Da a, b, c seguono le proprietà seguenti della tabella di tipo $N \times N$, nella quale ogni riga, e ugualmene ogni colonna, contiene $n+1$ segni « • »:

α) Per ogni coppia di colonne k, l esiste una ed una sola riga j', tale che le posizioni (j, k) e (j, l) contengono il segno « • ».

β) Per ogni coppia di righe j', h' esiste (almeno) una colonna l, tale che le posizioni (j, l) e (h, j) contengono il segno « • ».

γ) Esiste una quaterna di colonne che ha la proprietà: non esiste una riga la quale tagli (almeno) tre colonne della quaterna nelle posizioni indicate da « • ».

2. - Le nozioni fondamentali sui piani grafici finiti.

Consideriamo un insieme $\boldsymbol{P}$ di punti p e un insieme $\boldsymbol{R}$ di rette r, dove le rette non sono altro che sotto-insiemi di $\boldsymbol{P}$. Consideriamo — come *postulati* — le proposizioni *i*, *ii*, *iii* (v. nell'introduzione di questa nota) aggiungendo ad essi il quarto postulato:

iv) *Esiste una retta, che ha precisamente* $n+1$ *punti.*

Rispetto alla incidenza, i postulati *i* — *iv* definiscono i *piani grafici finiti.* L'insieme degli enti che soddisfano questa definizione non è vuoto, perchè esistono modelli che soddisfano i postulati *i* — *iv*.

Prima di far vedere i modelli, occorre dire alcune osservazioni:

Nell *ii* il punto comune, in conseguenza di *i*, è unico.

Se una retta a possiede $n+1$ punti, altrettanti punti sono su ogni altra retta b. — Basta proiettare a su b da un punto, certo esistente per *iii*, non giacente nè su a nè su b. In conseguenza di questo, per ogni punto passano $n+1$ rette. — Basta congiungere il punto con tutti i punti di una retta non passante per esso. —

Il numero dei punti di una retta diminuito di uno, verrà chiamato l'*ordine* del piano finito; ora n.

In conseguenza di quanto si è ora detto, il numero dei punti ed ugualmente il numero delle rette di un piano finito di ordine n è

$$N = n^2 + n + 1 .$$

— Basta contare tutti i punti delle rette passanti per un punto dato; ed ugualmente contare tutte le rette uscenti dagli $n+1$ punti di una retta data. —

Finora abbiamo dato le più semplici conseguenze di $i-iv$, ma ancora non sappiamo che esiste o no (almeno) uno piano grafico finito.

Si consideri un Σ di N vertici.

Si chiami punto un vertice di Σ; si chiami retta un r-poligono di Σ; si chiami incidenza la relazione: il vertice di Σ è vertice di r (incidenza punto-retta). Dunque — in virtù di a, b, c — abbiamo costruito dei modelli che ubbidiscono $i-iv$. Un piano rappresentato da un tal modello sia chiamato Σ (n)-*piano*.

Ma rimane ancora un problema: la costruzione così trovata produce o no tutti i possibili piani grarici finiti?

Senza entrare nel dettaglio di questo problema, osserviamo che per mezzo della tabella d'incidenza generale si può trasformarlo in una forma semplice, come qui si vedrà.

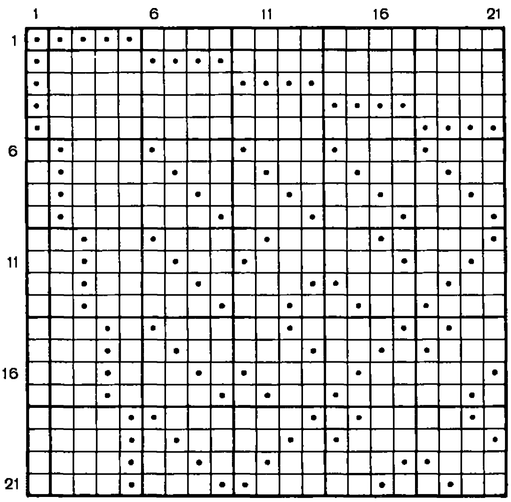

Fig. 3

Consideriamo le permutazioni:

$$\rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21\\1&6&8&18&21&2&7&9&19&13&3&17&16&5&12&10&4&11&14&15&20\end{pmatrix}$$

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21\\1&2&17&5&15&6&7&10&20&3&8&9&12&18&11&13&19&16&21&4&14\end{pmatrix}.$$

Applicando ρ alle righe e π alle colonne della fig. 2, essa si trasformerà nella fig. 3. La tabella precedente e l'ultima sono isomorfe. É chiaro che la tabella ultima ha pure le proprietà caratteristiche α, β, γ.

Due tabelle sono *isomorfe*, se esistono delle permutazioni del tipo di ρ e di π le quali trasformano — nell'insiemo — l'una tabella nell'altra.

Per mezzo della tabella (generale) d'incidenza si possono caratterizzare tutti i piani grafici finiti. In generale *la tabella d'incidenza è una tabella di tipo* $N \times N$ *contenente in ogni riga ed in ogni colonna* $n+1$ *segni d'incidenza in tal modo che le condizioni* α, β, γ *siano valide.*

Se la tabella è permutabile in forma ciclica — la tabella d'incidenza non gode necessariamente di questa proprietà — allora non è altro che la tabella di un Σ (n). [3]

OSSERVAZIONE. Questo modello diventa una delle fonti d'interesse per l'algebra moderna e per l'assiomatica, come ha visto l'Autore dopo le conferenze su quest'argomento (v. per es. [4]).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Z. KRYGOWSKA: *L'enseignement de la géométrie dans la mathématique unitaire d'aujour d'hui.* Matematica e Paedagogia, **23**, 1962.

[2] [3] L. LOMBARDO RADICE, *Piani grafici finiti non desarguesiani,* Denaro Editore, Palermo, (v. specialmente p. 62 - 82).

[4] S. REIMAN, *Su una proprietà dei piani grafici finiti,* Rend. Acc. Naz. dei Lincei, serie VIII., vol. 35, fac. 5 (1963), p. 279 - 281.

Pervenuto alla Segreteria dell' U.M.I.

il 15 Aprile 1965