Bollettino Unione Matematica Italiana

Giacomo Saban

Un esercizio di geometria differenziale.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.2, p. 245–250.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_245_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Un esercizio di geometria differenziale

GIACOMO SABAN (Istanbul)

Sunto. - *Si dà una estensione ad uno spazio euclideo ad n dimensioni di una costruzione segnalata da G. Pozzolo Ferraris, che ad una curva assegnata fa corrispondere un'altra dotata di tangente sempre ortogonale alla congiungente il punto di tangenza col centro di curvatura della curva di partenza.*

Summary. - *G. Pozzolo Ferraris has shown that the tangent to the locus described by any point fixed in the osculating plane of a given curve stays perpendicular to the line joining the point of tangency with the centre of curvature of the initial curve. Two extensions of this result were previously given, both in ordinary Euclidean 3-space. A general result for Euclidean n-space is now shown.*

1. - È dovuta a G. POZZOLO FERRARIS (1) una estensione alle curve sghembe di uno spazio euclideo ordinario di una costruzione suggerita da F. TISSERAND (2), che associa ad ogni curva piana una doppia infinità di curve, parimenti piane, la tangente di ciascuna delle quali si mantiene perpendicolare alla retta congiungente il punto di tangenza col centro di curvatura nel punto omologo della curva iniziale.

Recentemente è stata pubblicata (3) una ulteriore estensione di questo risultato, sempre nello spazio euclideo ordinario.

In questa nota si mostra invece come una proprietà analoga sussiste qualora si estenda questo tipo di costruzione a spazi euclidei di dimensione qualsivoglia - unico strumento per questa dimostrazione sono le formule di derivazione di JORDAN, analoghe a quelle di FRENET, per lo n-edro principale di una curva di E_n (4).

(1) GIULIA POZZOLO FERRARIS, *Sopra due curve notevoli*, «Boll. Un. Mat. It.», Serie 3, Anno XII, p. 49, (1957).

(2) F. TISSERAND, *Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul Infinitésimal*, «Gauthier-Villars», Paris, pp. 64-65, (1896 e 1933).

(3) GIACOMO SABAN, *Sopra alcune curve notevoli*, «Boll. Un. Mat. It.», Serie 3, Anno XV, pp. 34-37, (1960).

(4) C. JORDAN, *Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions*, «Compte-Rendus», pp. 795-797, T. LXXIX, (1874).

Si interpreta un risultato così ottenuto nel caso di $n=3$, ravvicinandolo ad un risultato già noto della teoria delle curve ([5]).

2. - Sia $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$ il raggio vettore di un generico punto X appartenente ad una curva (X) immersa in uno spazio euclideo ad n dimensioni E_n, il parametro s essendo l'elemento d'arco di questa curva e quindi definito dalla relazione

$$ds^2 = d\boldsymbol{x}^2. \tag{2.1}$$

A ciascun punto X della curva (X) si associa un n-edro principale spiccato da X, definito dagli n versori mutuamente ortogonali $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_n$, che sono rispettivamente il versore della tangente, quello della normale contenuta nel piano osculatore, ..., quello della normale contenuta nello E_s osculatore, ..., quello della normale contenuta nello E_{n-1} osculatore ed infine quello della normale ortogonale a questo E_{n-1} osculatore nel punto considerato. Sussistono allora le formule di derivazione

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \boldsymbol{a}_1, \tag{2.2}$$

$$\frac{d\boldsymbol{a}_j}{ds} = -\rho_{j-1}\boldsymbol{a}_{j-1} + \rho_j \boldsymbol{a}_{j+1}, \qquad (j=1,2,\ldots,n), \tag{2.3}$$

ove $\rho_0=\rho_n=0$, essendo le ρ_j date in funzione delle successive derivate di $\boldsymbol{x}$ mediante le note formule di JORDAN ([4]).

Consideriamo ora la curva (X^*), di equazione vettoriale

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{n} \Lambda^i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{x}^*(s), \tag{2.4}$$

essendo le quantità Λ^i costanti; detta curva è ovviamente il luogo geometrico di un punto X^* *fisso* rispetto allo n-edro principale di (X) in X.

Derivando a partire della (2.4) si ottiene il vettore

$$\frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds} = (1-\Lambda^2\rho_1)\boldsymbol{a}_1 + \sum_{j=2}^{n-1}(\Lambda^{j-1}\rho_{j-1} - \Lambda^{j+1}\rho_j)\boldsymbol{a}_j + \Lambda^{n-1}\rho_{n-1}\boldsymbol{a}_n, \tag{2.5}$$

portato dalla tangente in X^* alla (X^*).

([5]) GINO LORIA, *Curve sghembe speciali, algebriche e trascendenti*, «Zanichelli», Bologna, Volume II, pp. 117-119, (1925).

Consideriamo ora i punti $C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}, C_{n-1}$ i cui raggi vettori sono

$$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{x} + \frac{1}{\rho_1 \Lambda^2} \sum_{i=2}^{n} \Lambda^i \boldsymbol{a}_i ,$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{x} + \frac{\Lambda^1}{\Lambda^2} \frac{1}{\rho_2 \Lambda^3} \sum_{i=3}^{n} \Lambda^i \boldsymbol{a}_i ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{c}_{n-2} = \boldsymbol{x} + \frac{\Lambda^1}{\Lambda^{n-2}} \frac{1}{\rho_{n-2} \Lambda^{n-1}} \sum_{i=n-1}^{n} \Lambda^i \boldsymbol{a}_i ,$$

$$\boldsymbol{c}_{n-1} = \boldsymbol{x} + \frac{\Lambda^1}{\Lambda^{n-1}} \frac{1}{\rho_{n-1}} \boldsymbol{a}_n ;$$

ovviamente è necessario supporre non nulle sia le curvature di (X) in X che le quantità $\Lambda^2, \Lambda^3, \ldots, \Lambda^{n-1}$.

Le direzioni dei segmenti $C_1X^*, C_2X^*, \ldots, C_{n-2}X^*, C_{n-1}X^*$ si riassumono nella formula

$$\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c}_j = \sum_{h=1}^{j} \Lambda^h \boldsymbol{a}_h + \left(1 - \frac{\Lambda^1}{\Lambda^j} \frac{1}{\rho_j \Lambda^{j+1}}\right) \sum_{i=j+1}^{n} \Lambda^i \boldsymbol{a}_i . \tag{2.5}$$

Si ha allora

$$(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c}_j) \cdot \frac{d\boldsymbol{x}^*}{ds} = (1 - \Lambda^2 \rho_1) \Lambda^1 + \sum_{h=2}^{j} (\Lambda^{h-1} \rho_{h-1} - \Lambda^{h+1} \rho_h) \Lambda^h$$

$$+ \left(1 - \frac{\Lambda^1}{\Lambda^j} \frac{1}{\rho_j \Lambda^{j+1}}\right) \left[\sum_{i=j+1}^{n} \Lambda^i (\Lambda^{i-1} \rho_{i-1} - \Lambda^{i+1} \rho_i) + \Lambda^n \Lambda^{n-1} \rho_{n-1} \right]$$

$$= \Lambda^1 - \Lambda^j \Lambda^{j+1} \rho_j + \left(1 - \frac{\Lambda^1}{\Lambda^j} \frac{1}{\rho_j \Lambda^{j+1}}\right) \Lambda^j \Lambda^{j+1} \rho_j$$

$$= 0$$

per cui risulta dimostrato che *la tangente in X^* alla curva (X^*) si mantiene ortogonale alle $n-1$ rette X^*C_j, congiungenti X^* con i punti C_j.*

Si osservi che i punti C_j sono ottenuti in $(X\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_n)$ segando lo spazio lineare di dimensione $n-j-1$, definito mediante le equazioni

$$Y^1 = Y^2 = \ldots = Y^j = 0, \quad Y^{j+1} = \Lambda^1/\rho_j \Lambda^j$$

con lo spazio lineare (di dimensione $j+1$) di equazioni

$$\frac{X^{j+1}}{\Lambda^{j+1}} = \frac{Y^{j+2}}{\Lambda^{j+2}} = \dots = \frac{Y^n}{\Lambda^n},$$

le Y^h denotando coordinate ortogonali monometriche nel riferimento $(X\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \dots \boldsymbol{a}_n)$.

3. - Consideriamo ora i prodotti scalari

$$(3.1) \qquad p_{jk} = (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c}_j) \cdot (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c}_k)$$

con $j \neq k$. È lecito supporre $j < k$ e, per le formule (2.5), si ha

$$p_{jk} = \sum_{l=1}^{j} (\Lambda^l)^2 + \left(1 - \frac{\Lambda^1}{\Lambda^j} \frac{1}{\rho_j \Lambda^{j+1}}\right) \sum_{m=j+1}^{k} (\Lambda^m)^2$$
$$+ \left(1 - \frac{\Lambda^1}{\Lambda^j} \frac{1}{\rho_j \Lambda^{j+1}}\right)\left(1 - \frac{\Lambda^1}{\Lambda^h} \frac{1}{\rho_k \Lambda^{k+1}}\right) \sum_{p=k+1}^{n} (\Lambda^p)^2$$

ossia

$$p_{jk} = \sum_{\nu=1}^{n} (\Lambda^\nu)^2 - \frac{\Lambda^1}{\rho_j \Lambda^j \Lambda^{j+1}} \sum_{\mu=j+1}^{n} (\Lambda^\mu)^2 - \frac{\Lambda^1}{\rho_k \Lambda^k \Lambda^{k+1}} \sum_{\sigma=k+1}^{n} (\Lambda^\sigma)^2 +$$
$$+ \frac{(\Lambda^1)^2}{\rho_j \rho_k \Lambda^j \Lambda^k \Lambda^{j+1} \Lambda^{k+1}} \sum_{\sigma=k+1}^{n} (\Lambda^\sigma)^2.$$

La condizione di ortogonalità di X^*C_j con X^*C_k è quindi

$$(3.2) \qquad p_{jk} = 0$$

e se questa condizione è verificata per tutte le possibili coppie di valori di j e k, le rette X^*C_h, considerate assieme alla tangente in X^* ad (X^*), costituiscono a loro volta gli spigoli di un n-edro di rette mutuamente ortogonali spiccate da X^*. Si osservi ancora che ciascuna delle condizioni (4.2) si riduce ad una equazione quadratica a coefficienti costanti

$$(3.3) \qquad A_{jk}\rho_j\rho_k - B_{jk}\rho_j - C_{jk}\rho_k + D_{jk} = 0$$

nelle curvature ρ_j e ρ_k di (X). Queste condizioni sono ovviamente in numero di $(n-1)(n-2)/2$ e vincolano le $n-1$ curvature di (X), dovendo sussistere espressioni lineari fratte del tipo

$$(3.4) \qquad \rho_k = \frac{B_{jk}\rho_j - D_{jk}}{A_{jk}\rho_j - C_{jk}}. \qquad j = 1, 2, \dots, k-1,$$

In generale si potrà concludere che se sussistono le (3.2) cioè *se ad una curva* (X) *di* E_n *si associa una curva* (X^*) (luogo geometrico di un punto fisso rispetto allo n-edro principale di (X) in X) *mediante le* (2.4) *e se le direzioni definite dalle* (2.5) *sono tali che tutte le quantità* p_{ik} *definite dalle* (3.1) *siano nulle, la curva* (X) *è tale che presi quattro qualsivogiano punti su di essa, il birapporto delle h-esime curvature di quei quattro punti ha il medesimo valore per ogni* $h \in (1, 2, ..., n-1)$.

4. - Nello spazio euclideo ordinario ($n = 3$) e con le notazioni usuali per la flessione e la torsione, avremo

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} + \Lambda^1 \boldsymbol{a}_1 + \Lambda^2 \boldsymbol{a}_2 + \Lambda^3 \boldsymbol{a}_3 ,$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{x} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{\rho} \frac{\Lambda^3}{\Lambda^2} \boldsymbol{a}_3 ,$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{x} + \frac{1}{\tau} \frac{\Lambda^1}{\Lambda^2} \boldsymbol{a}_3$$

e la condizione di ortogonalità per $\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c}_1$ ed $\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c}_2$ si riduce a

$$(\Lambda^2)^2[(\Lambda^1)^2 + (\Lambda^2)^2 + (\Lambda^3)^2]\rho\tau - \Lambda^1\Lambda^2\Lambda^3\rho - \\ - \Lambda^2[(\Lambda^2)^2 + (\Lambda^3)^2]\tau + \Lambda^1\Lambda^3 = 0. \tag{4.1}$$

Questa equazione assume una forma più semplice se $\Lambda^1 = 0$, ma si verifica facilmente a partire dalla (4.1) che in tal caso il problema è totalmente privo di interesse.

Nel caso generale si ha dunque

$$A\rho\tau - B\rho - C\tau + D = 0 \tag{4.2}$$

cioè

$$\tau = \frac{B\rho - D}{A\rho - C} \tag{4.3}$$

con

$$\begin{aligned} A &= (\Lambda^2)^2[(\Lambda^1)^2 + (\Lambda^2)^2 + (\Lambda^3)^2]; \\ B &= \Lambda^1\Lambda^2\Lambda^3; \\ C &= \Lambda^2[(\Lambda^2)^2 + (\Lambda^3)^2]; \\ D &= \Lambda^1\Lambda^3. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Di conseguenza il determinante della sostituzione lineare fratta (4.3) è

$$\Delta = AD - BC = (\Lambda^1)^3(\Lambda^2)^2\Lambda^2$$

e $\Delta \neq 0$ se $\Lambda^i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Inoltre i coefficienti A, B, C, D *non* sono costanti arbitrarie: dalla seconda e quarta delle equazioni precedenti segue che $\Lambda^2 = B/D$ e sostituendo questo valore nella terza risulta

$$(\Lambda^3)^2 = \frac{CD}{B} - \frac{B^2}{D^2} = \frac{CD^3 - B^3}{BD^2}; \tag{4.5}$$

dalle quarta delle (4.4) si ha $\Lambda^1 = D/\Lambda^3$ e sostituendo i valori delle Λ^i così ottenuti nella prima risulta infine

$$(AD - BC)\,\frac{CD^3 - B^3}{BD^2} = B^2D, \tag{4.6}$$

relazione che vincola i coefficienti della (4.2). Inoltre, la condizione di realtà per Λ^3 permette di dedurre dalla (4.5) la condizione

$$\frac{CD^3 - B^3}{BD^2} > 0$$

e quindi dalla (4.6) si deduce che il segno di Δ è il segno di B^2D, cioè è il segno di D.

La (4.3) mostra ancora che *scelti quattro punti qualsiansi su (X), il valore del birapporto delle flessioni in questi quattro punti eguaglia il valore del birapporto delle torsioni della curva nei medesimi punti.*

Infine si osservi che la condizione (4.2) è un caso particolare dell'equazione

$$A_{00}\rho^2 + A_{01}\rho\tau + A_{11}\tau^2 + B\rho + C\tau + D = 0 \tag{4.7}$$

alla quale si giunge considerando la rigata generata da una retta fissa rispetto al triedro mobile di (X) ed imponendo al luogo di un punto fisso su questa retta di essere una traiettoria isogonale della generatrici della rigata [5]. Effettivamente la condizione (4.2) (nell'ipotesi che sia soddisfatta la (4.6)) permette di associare alla curva (X) inizialmente considerata una rigata dotata di questa proprietà.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
l'11 gennaio 1965.