Gaetano Rodriquez

Approssimabilità di irrazionali p-adici mediante numeri razionali. II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.2, p. 232–244.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_232_0>

Approssimabilità di irrazionali p-adici mediante numeri razionali. II. (*).

GAETANO RODRIQUEZ (Milano)

Sunto. - *Si riprende la dimostrazione fatta in un precedente lavoro riguardante l'approssimabilità di irrazionali p-adici mediante numeri razionali e si migliora la costante C che figura nella funzione*

$$f(H_i) = C(\log\log\log H_i)^{-\frac{1}{2}}.$$

1. **Introduzione.** - *Risultati.* - In questo lavoro si studia una questione di approssimabilità degli algebrici reali e p-adici mediante numeri razionali. A tale argomento ho già dedicato una mia precedente ricerca [3] alla quale rimando il lettore anche per eventuali notizie bibliografiche.

Da quanto sarà esposto nei numeri successivi risulterà il seguente

TEOREMA. - *Sia*

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \tag{1}$$

una equazione a coefficienti razionali interi di grado $n \geq 2$, irriducibile nel campo razionale e priva di radici multiple, la quale ammetta una radice ζ nel campo reale, una radice ζ_1 nel campo p_1-adico, ..., una radice ζ_t nel campo p_t-adico, dove $p_1, \dots, p_t$ sono numeri primi distinti. Sia poi $\Sigma = \{k_i\} = \{h_i/q_i\}$ una successione di infiniti numeri razionali distinti, con

$$(h_i, q_i) = 1 \quad e \quad \max(|h_i|, |q_i|) > e^e,$$

i quali verifichino la relazione:

$$\min(1, |\zeta - k_i|) \prod_{\tau=1}^{t} \min(1, |q_i \zeta_\tau - h_i|_{p_\tau}) \leq H_i^{-(2+f(H_i))},$$

dove

$$H_i = \max(|h_i|, |q_i|) \quad e \quad f(H_i) = 5\sqrt{\log(4n)}\,(\log\log\log H_i)^{-\frac{1}{2}}.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo n. 40 del Comitato C. N. R. per la matematica, anno 1965.

Allora si avrà:

$$\overline{\lim_{i \to +\infty}} \frac{\log H_{i+1}}{\log H_i} = +\infty. \tag{2}$$

Questo teorema è stato dimostrato in [3] nel caso

$$f(H_i) = (8n+\varepsilon)(\log\log\log H_i)^{-\frac{1}{2}}, \text{ con } \varepsilon > 0.$$

Con la presente ricerca viene quindi migliorato il valore della costante che compare al numeratore di $f(H_i)$.

2. – Esponiamo ora tre lemmi dai quali si desumerà il nostro teorema. Il lemma 1 e il lemma 2 sono tratti direttamente dalla monografia [2], alla quale rimandiamo il lettore per la loro dimostrazione (1).

LEMMA 1. – *Sia*

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

con $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ *e* $n \geq 1$, *un polinomio con coefficienti interi che non abbia zeri multipli. Siano inoltre* m *un intero positivo e* s *un numero reale tali che:*

$$0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \quad ms^2 \geq \log(4n).$$

Siano poi $r_1, \dots, r_m$ m *interi positivi e* $\rho_1, \dots, \rho_m$; $\sigma_1, \dots, \sigma_m$; $\tau_1, \dots, \tau_m$ $3m$ *numeri reali positivi che verificano le condizioni:*

$$\left|\frac{r_u}{\rho_u} - 1\right| \leq \frac{1}{10}, \quad \left|\frac{r_u}{\sigma_u} - 1\right| \leq \frac{1}{10}, \quad \left|\frac{r_u}{\tau_u} - 1\right| \leq \frac{1}{10} \qquad (u = 1, \dots, m). \tag{3}$$

Esistono allora una costante positiva c, dipendente solo da $F(x)$, *e un polinomio non identicamente nullo*

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_1=0}^{r_1} \dots \sum_{i_m=0}^{r_m} a_{i_1, \dots, i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$$

con le seguenti proprietà:

(i) *I coefficienti* $a_{i_1, \dots, i_m}$ *sono interi che soddisfano alla condizione:*

$$| a_{i_1, \dots, i_m} | \leq c^{r_1 + \dots + r_m},$$

(1) Si veda [2], 167 e 97.

e ciascuno di essi è diverso da zero soltanto se la corrispondente m-upla $i_1, \dots, i_m$ verifica le condizioni:

$$\sum_{u=1}^{m} \frac{i_u}{\rho_u} > \left(\frac{1}{2} - s\right) \sum_{u=1}^{m} \frac{r_u}{\rho_u}, \quad \sum_{u=1}^{m} \frac{i_u}{\sigma_u} < \left(\frac{1}{2} + s\right) \sum_{u=1}^{m} \frac{r_u}{\sigma_u}.$$

(ii) *Posto*

$$A_{j_1, \dots, j_m}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{j_1! \dots j_m!} \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_m} A(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}},$$

$A_{j_1, \dots, j_m}(x, \dots, x)$ è divisibile per $F(x)$ per tutte le m-uple $j_1, \dots, j_m$ tali che:

$$0 \leq j_1 \leq r_1, \dots, 0 \leq j_m \leq r_m, \sum_{u=1}^{m} \frac{j_u}{\tau_u} \leq \left(\frac{1}{2} - s\right) \sum_{u=1}^{m} \frac{r_u}{\tau_u}.$$

(iii) *Vale la seguente maggiorazione* (²):

$$A_{j_1, \dots, j_m}(x_1, \dots, x_m) \ll c^{r_1 + \dots + r_m}(1 + x_1)^{r_1} \dots (1 + x_m)^{r_m},$$

e quindi:

$$A_{j_1, \dots, j_m}(x, \dots, x) \ll c^{r_1 + \dots + r_m}(1 + x)^{r_1 + \dots + r_m}.$$

In particolare, se fissiamo i parametri ρ_u, σ_u, τ_u nel seguente modo:

$$\rho_u = \sigma_u = r_u, \quad \tau_u = \frac{2r_u}{2 + f(H_u)} \qquad (u = 1, \dots, m),$$

dove è $f(H_u) = 5\sqrt{\log(4n)}\,(\text{logloglog}\, H_u)^{-\frac{1}{2}}$ e i numeri H_u sono interi positivi scelti in modo che si abbia:

$$0 < \frac{r_u}{\tau_u} - 1 = \frac{f(H_u)}{2} \leq \frac{1}{10},$$

(²) Dati due polinomi

$$P(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_1=0}^{r_1} \dots \sum_{i_m=0}^{r_m} a_{i_1, \dots, i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$$

e

$$Q(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_1=0}^{r_1} \dots \sum_{i_m=0}^{r_m} b_{i_1, \dots, i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$$

a coefficienti reali, scriveremo $P(x_1, \dots, x_m) \ll Q(x_1, \dots, x_m)$ per indicare che è $|a_{i_1, \dots, i_m}| \leq b_{i_1, \dots, i_m}$ per tutte le m-uple $i_1, \dots, i_m$.

risultano verificate tutte le condizioni (3) e il comma (i) si sostituisce con il seguente:

(i') *I coefficienti* $a_{i_1,\dots,i_m}$ *sono interi tali che*

$$|a_{i_1,\dots,i_m}| \leq c^{r_1+\dots+r_m}$$

e ciascuno di essi è diverso da zero soltanto se la corrispondente m-upla verifica la condizione:

$$\left(\frac{1}{2}-s\right)m < \sum_{u=1}^{m} \frac{i_u}{r_u}\left(\frac{1}{2}+s\right)m.$$

LEMMA 2. - *Siano* $0<\delta\leq 1$, $b\geq 1$ *numeri reali, e* $r_1, \dots, r_m$; $H_1, \dots, H_m$, *con* $m\geq 2$, *interi positivi tali che:*

$$r_u \leq r_{u-1}\delta, \qquad r_u \log H_u \geq r_1 \log H_1 \qquad (u=2, \dots, m), \tag{4}$$

$$H_1 \geq 2^{\frac{1}{\delta}(m-1)m(2m+1)}, \qquad b \leq H_1^{\frac{1}{m}r_1\delta}.$$

Siano poi $k_u = \dfrac{h_u}{q_u}$ $(u=1, \dots, m)$ m *numeri razionali con*

$$(h_u, q_u)=1 \quad e \quad \max(|h_u|, |q_u|) = H_u.$$

Sia inoltre:

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_1=0}^{r_1} \dots \sum_{i_m=0}^{r_m} a_{i_1,\dots,i_m} x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$$

un polinomio non identicamente nullo a coefficienti interi tali che:

$$|a_{i_1,\dots,i_m}| \leq b$$

per ogni m-upla $i_1, \dots, i_m$.

Allora esiste una m-upla di interi non negativi $j_1, \dots, j_m$ *che soddisfa alla condizione:*

$$\sum_{u=1}^{m} \frac{j_u}{r_u} \leq 2^{m+1}\delta^{2^{-(m-1)}}$$

e tale che sia

$$A_{j_1,\dots,j_m}(k_1, \dots, k_m) \neq 0.$$

3. - LEMMA 3. - *Siano* $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_t$ *numeri reali non negativi che verificano la condizione:*

$$\Gamma_0+\Gamma_1+\dots+\Gamma_t=1.$$

Sia inoltre

$\Sigma = \{k_i\} = \{h_i/q_i\}$, *con* $(h_i, q_i) = 1$ *e* $H_i = \max(|h_i|, |q_i|) > e^e$,

una successione di infiniti numeri razionali distinti. Allora, se sono verificate per ogni coppia h_i, q_i *le relazioni:*

$$(5)\quad \begin{cases} \min(1, |\zeta - k_i|) \leq H_i^{-\Gamma_0(2+f(H_i))} \\ \min(1, |q_i\zeta_\tau - h_i|_{p_\tau}) \leq H_i^{-\Gamma_\tau(2+f(H_i))} \qquad (\tau = 1, \ldots, t), \end{cases}$$

dove ζ *e* ζ_τ *sono rispettivamente una radice reale e una radice* p_τ*-adica della* (1), *dovrà essere soddisfatta la* (2).

Per la dimostrazione procederemo per assurdo.

Supporremo cioè che gli elementi di Σ verifichino le (5) e che la (2) non sia soddisfatta, e proveremo che ciò è impossibile.

In primo luogo esporremo in questo numero e nel n. 4 alcuni risultati preliminari che ci consentiranno nel n. 5 di dimostrare il Lemma.

Se la (2) non è verificata esisterà una costante $c > 1$ tale che per ogni i si abbia:

$$H_{i+1} \leq H_i^c,$$

e quindi per ogni numero positivo X, opportunamente grande, vi sarà un elemento k_i di Σ per cui:

$$X \leq H_i \leq X^c.$$

Sia ora m un intero positivo e poniamo:

$$(6)\qquad a = \sqrt{\log(4n)},\quad s = \frac{a}{\sqrt{m}},\quad \delta = e^{-m\cdot 2^{m-1}},\quad X = e^{\frac{2}{\delta}m^3}.$$

Poichè Σ contiene infiniti elementi distinti, è $\lim\limits_{i\to+\infty} H_i = +\infty$, e quindi è possibile scegliere m elementi di Σ che, con una nuova scelta degli indici, indicheremo con $k_1 = h_1/q_1, \ldots, k_m = h_m/q_m$, di altezza $H_u > e^e$ $(u = 1, \ldots, m)$ tali che:

$$(7)\qquad X_u \leq H_u \leq X_u^c \qquad (u = 1, \ldots, m),$$

dove

$$(8)\qquad X_1 = X,\quad X_2 = H_1^{\frac{2}{\delta}} \leq X_1^{\frac{2c}{\delta}},\ \ldots,\ X_m = H_{m-1}^{\frac{2}{\delta}} \leq X_{m-1}^{\frac{2c}{\delta}}.$$

Si avrà allora:

$$(9) \qquad \frac{\log H_{u+1}}{\log H_u} > \frac{2}{\delta} \qquad (u = 1, \ldots, m-1),$$

giacchè per le (7) e (8) è:

$$\frac{\log H_{u+1}}{\log H_u} \geq \frac{\log X_{u+1}}{\log H_u} = \frac{\log H_u^{\frac{2}{\delta}}}{\log H_u}.$$

Quindi risulta:

$$H_1 < H_2 < \ldots < H_m.$$

Inoltre dalla (8) si ricava:

$$X_u \leq X^{\left(\frac{2c}{\delta}\right)^{u-1}} \qquad (u = 1, \ldots, m),$$

da cui

$$H_u \leq X_u^c \leq X^{c\left(\frac{2c}{\delta}\right)^{u-1}} \leq X^{\left(\frac{2c}{\delta}\right)^u} \leq X^{\left(\frac{2c}{\delta}\right)^m}.$$

Quando m è opportunamente grande si ha poi:

$$X^{\left(\frac{2c}{\delta}\right)^m} = \left(e^{2m^3} . e^{m \, . \, 2^{m-1}}\right)^{\left(2c \, . \, e^{m \, . \, 2^{m-1}}\right)^m} =$$

$$= e^{(2c)^m . \, 2m^3 . \, e^{(m^2+m) \, . \, 2^{m-1}}} \leq e^{e^{e^m}},$$

e quindi:

$$H_u \leq e^{e^{e^m}} \qquad (u = 1, \ldots, m).$$

Segue:

$$f(H_u) \geq \frac{5a}{\sqrt{m}},$$

e pertanto la somma:

$$\sigma = \sum_{u=1}^{m} f(H_u),$$

per m opportunamente grande, soddisfa alla relazione:

$$(10) \qquad \sigma \geq 5a\sqrt{m}.$$

Scegliamo ora i numeri interi positivi $r_1, \ldots, r_m$ in modo che sia:

$$\frac{1}{r_1-1} \leq \frac{1}{m} < 1 \quad \text{e} \quad r_u \geq r_1 \frac{\log H_1}{\log H_u} > r_u - 1 \qquad (u=2, \ldots, m). \tag{11}$$

Si osservi in primo luogo che è:

$$r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_m .$$

Infatti, dalla 2ª delle (11) si ricava:

$$r_u = \begin{cases} \left[r_1 \dfrac{\log H_1}{\log H_u}\right] + 1, \text{ se } r_1 \dfrac{\log H_1}{\log H_u} \text{ non è intero} \\ r_1 \dfrac{\log H_1}{\log H_u}, \text{ se } r_1 \dfrac{\log H_1}{\log H_u} \text{ è intero;} \end{cases}$$

e confrontando r_u con le analoghe espressioni di r_{u-1}, si ottiene:

$$r_u \leq r_{u-1} \qquad (u=2, \ldots, m). \tag{12}$$

Più esattamente si può dimostrare che nella (12) vale solo il segno $<$. Infatti dalla (12) segue:

$$\frac{1}{r_u-1} \leq \frac{1}{r_1-1} \qquad (u=2, \ldots, m),$$

e tenendo conto delle (11) e della (9), si ha:

$$\begin{aligned} r_u \log H_u &= \left(1+\frac{1}{r_u-1}\right)(r_u-1) \log H_u < \left(1+\frac{1}{r_1-1}\right) r_1 \log H_1 \leq \\ &\leq \left(1+\frac{1}{m}\right) r_1 \log H_1 \leq 2 r_1 \log H_1 . \end{aligned} \tag{13}$$

Quindi:

$$2 r_{u-1} \log H_{u-1} \geq 2 r_1 \log H_1 > r_u \log H_u ,$$

cioè:

$$r_{u-1} > \frac{1}{2} \frac{\log H_u}{\log H_{u-1}} r_u \geq \frac{1}{2} \frac{2}{\delta} r_u = \frac{1}{\delta} r_u \qquad (u=2, \ldots, m),$$

da cui

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_m ,$$

e di conseguenza:

$$\sum_{u=1}^{m} r_u \leq m r_1 .$$

4. - Supponiamo ora che siano verificate le prime due delle (6), Allora, per m opportunamente grande risulterà:

$$0 \leq s \leq \frac{1}{2}.$$

Pertanto, posto come al n. 2:

$$\rho_u = \sigma_u = r_u \quad \text{e} \quad \tau_u = \frac{2\tau_u}{2 + f(H_u)}, \tag{14}$$

e scelti gli H_u in modo che sia verificata la 3ª delle (3), esisterà per il lemma 1 un polinomio

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i_1=0}^{r_1} \ldots \sum_{i_m=0}^{r_m} a_{i_1, \ldots, i_m} x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m}$$

con le proprietà (i′), (ii), (iii). A tale polinomio, con la particolare scelta dei numeri r_u operata al n. 3, è possibile applicare il Lemma 2 perchè quando m è opportunamente grande, risultano verificate le condizioni:

$$H_1 \geq e^{\frac{1}{\delta} m(m-1)(2m+1)} \quad \text{e} \quad c^{r_1 + \ldots + r_m} \leq H_1^{\frac{1}{m} r_1 \delta},$$

in quanto è:

$$H_1 \geq X = e^{\frac{2}{\delta} m^3}.$$

Per il Lemma 2 esiste allora una m-upla $l_1, \ldots, l_m$ che verifica le condizioni:

$$0 \leq l_1 \leq r_1, \ \ldots, \ 0 \leq l_m \leq r_m, \ \sum_{u=1}^{m} \frac{l_u}{r_u} \leq 2^{m+1} \delta^{\frac{1}{2m-1}}, \tag{15}$$

e per la quale è:

$$A_{l_1, \ldots, l_m}\left(\frac{h_1}{q_1}, \ldots, \frac{h_m}{q_m}\right) \neq 0.$$

Dall'ultima delle (15), per m sufficientemente grande, si ricava infine per la somma $\Lambda = \sum_{u=1}^{m} \frac{l_u}{r_u}$:

$$0 \leq \Lambda \leq 2^{m+1} \left(e^{-m \cdot 2^{m-1}}\right)^{\frac{1}{2^{m-1}}} = 2\left(\frac{2}{e}\right)^m \leq 1. \tag{16}$$

5. - Indichiamo con $A_{(l)}$ il numero intero:

$$A_{(l)} = q_1^{r_1} \ldots q_m^{r_m} A_{l_1, \ldots, l_m}\left(\frac{h_1}{q_1}, \ldots, \frac{h_m}{q_m}\right),$$

che, per quanto si è detto al numero precedente, risulta diverso da zero.

Vogliamo ottenere un maggiorante di $|A_{(l)}|$.

Sviluppando con la formula di TAYLOR si ha per ogni α:

$$A(x_1,\dots, x_m) = \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_m=0}^{r_m} A_{j_1,\dots,j_m}(\alpha,\dots,\alpha)\,(x_1-\alpha)^{j_1}\dots(\alpha_m-\alpha)^{j_m},$$

e quindi:

$$A_{l_1,\dots,l_m}(x_1,\dots,x_m) =$$

(17)

$$= \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_m=0}^{r_m} A_{j_1,\dots,j_m}(\alpha,\dots,\alpha)\binom{j_1}{l_1}\dots\binom{j_m}{l_m}(x_1-\alpha)^{j_1-l_1}\dots(x_m-\alpha)^{j_m-l_m},$$

in cui si è posto $\binom{j_u}{l_u} = 0$ se $j_u < l_u$.

Allora, assumendo $x_u = k_u$ $(u = 1,\dots, m)$ e $\alpha = \zeta$, si ha:

$$A_{(l)} = q_1^{r_1}\dots q_m^{r_m} \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_m=5}^{r_m} A_{j,\dots,j_m}(\zeta_1\dots\zeta)\binom{j_1}{l_1}\dots \tag{18}$$

$$\dots\binom{j_m}{l_m}(k_1-\zeta)^{j_1-l_1}\dots(k_m-\zeta)^{j_m-l_m},$$

dove per il comma (ii) del Lemma 1 è $A_{j_1,\dots,j_m}(\zeta,\dots,\zeta) = 0$ per tutte le m-uple $j_1,\dots,j_m$ che verificano le condizioni:

$$0 \leq j_1 \leq r_1,\ \dots,\ 0 \leq j_m \leq r_m,\ \sum_{u=1}^{m}\frac{j_u}{\tau_u} \leq \left(\frac{1}{2}-s\right)\sum_{u=1}^{m}\frac{r_u}{\tau_u}.$$

Pertanto basta estendere le sommatorie di (18) a tutti i sistemi $j^* = (j_1,\dots, j_m)$ per i quali

$$l_1 \leq j_1 \leq r_1,\ \dots,\ l_m \leq j_m \leq r_m,\ \sum_{u=1}^{m}\frac{j_u}{\tau_u} > \left(\frac{1}{2}-s\right)\sum_{u=1}^{m}\frac{r_u}{\tau_u}. \tag{19}$$

Posto $B = \max(|a_0|, |a_1|,\dots, |a_n|)$, per il comma (iii) del Lemma 1 e per la nota relazione $|\zeta| \leq 1 + B$, si ha inoltre:

$$|A_{j_1\dots,j_m}(\zeta,\dots,\zeta| \leq c^{r_1+\dots+r_m}(1+|\zeta|)^{r_1+\dots+r_m} \leq$$

$$\leq c^{mr_1}(1+|\zeta|)^{mr_1} \leq [c(2+B)]^{mr_1} = c_1^{mr_1},$$

dove $c_1 = c(2+B)$; e poichè è:

$$\binom{j_u}{l_u} \leq \sum_{l=0}^{j_u}\binom{j_u}{l} = 2^{j_u},$$

si ricava:

$$\sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_m=0}^{r_m} A_{j_1, \dots, j_m}(\zeta, \dots, \zeta) \binom{j_1}{l_1} \dots \binom{j_m}{l_m} \leq$$

$$\leq \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_m=0}^{r_m} c_1^{mr_1} \cdot 2^{j_1 + \dots + j_m} =$$

$$= c_1^{mr_1}(2^{r_1+1} - 1) \dots (2^{r_m+1} - 1) < c_1^{mr_1} \cdot 2^{2r_1} \dots 2^{2r_m} \leq (4c_1)^{mr_1}.$$

Nel caso $\Gamma_0 > 0$, per le (5) e (19) e per le seconde delle (14) e delle (4), risulta:

$$\max_{(j_1, \dots, j_m) \in j^*} | k_1 - \zeta |^{j_1 - l_1} \dots | k_m - \zeta |^{j_m - l_m} \leq$$

$$\leq \max_{(j_1, \dots, j_m) \in j^*} \prod_{u=1}^{m} H_u^{-\Gamma_0 (j_u - l_u)(2 + f H_u)} =$$

$$= \max_{(j_1, \dots, j_m) \in j^*} \prod_{u=1}^{m} H_u^{-2\Gamma_0 (j_u - l_u) \frac{r_u}{\tau_u}} \leq$$

$$\leq \max_{(j_1, \dots, j_m) \in j^*} H_1^{-2r_1 \Gamma_0 \sum_{u=1}^{m} \frac{j_u - l_u}{\tau_u}} \leq$$

$$\leq H_1^{-2r_1\Gamma_0 \left[\left(\frac{1}{2} - s\right) \sum_{u=1}^{m} \frac{r_u}{\tau_u} - \sum_{u=1}^{m} \frac{l_u}{\tau_u}\right]}.$$

Inoltre è:

$$\sum_{u=1}^{m} \frac{r_u}{\tau_u} = \sum_{u=1}^{m} \left(1 + \frac{f(H_u)}{2}\right) = m + \frac{\sigma}{2},$$

ed essendo:

$$\left| \frac{r_u}{\tau_u} - 1 \right| \leq \frac{1}{10}, \quad \text{e perciò} \quad \tau_u \geq \frac{9}{10} r_u > \frac{1}{2} r_u,$$

si ricava:

$$\sum_{u=1}^{m} \frac{l_u}{\tau_u} \leq 2 \sum_{u=1}^{m} \frac{l_u}{r_u} = 2\Lambda.$$

Quindi:

$$\max_{(j_1, \dots, j_m) \in j^*} | k_1 - \zeta |^{j_1 - l_1} \dots | k_m - \zeta |^{j_m - l_m} \leq$$

$$\leq \mathrm{H}_1^{-2r_1\Gamma_0\left[\left(\frac{1}{2} - s\right)\left(m + \frac{\sigma}{2}\right) - 2\Lambda\right]}.$$

Per la (13) si ha poi:

$$q_1^{r_1} \dots q_m^{r_m} \leq H_1^{r_1} \,..\, H_m^{r_m} < H_1^{\,r_1+r_1(m-1)\left(1+\frac{1}{m}\right)} = H_1^{\,r_1\left(1+m-\frac{1}{m}\right)},$$

e pertanto si ottiene:

$$(20 \qquad | A_{(l)} | \leq (4c_1)^{mr_1} H_1^{\,r_1\left\{1+m-\frac{1}{m}-2\Gamma_0\left[\left(\frac{1}{2}-s\right)\left(m+\frac{\sigma}{2}\right)-2\Lambda\right]\right\}}.$$

La precedente maggiorazione vale anche se $\Gamma_0 = 0$. Infatti, posto nelta (17) $\alpha = 0$ e $x_u = k_u$ $(u = 1, \dots, m)$, si ha:

$$A_{(l)} = q_1^{r_1} \,..\, q_m^{r_m} \sum_{j_1=1}^{r_1} \dots \sum_{j_m=0}^{r_w} A_{j_1, \dots, j_m}(0, \dots, 0) \binom{j_1}{l_1} \dots$$

$$\dots \binom{j_m}{l_m} k_1^{j_1-l_1} \dots k_m^{j_m-l_m},$$

e quindi:

$$| A_{(l)} | \leq \left| \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_m=0}^{r_m} A_{j_1, \dots, j_m}(0, \dots 0) \binom{j_1}{l_1} \dots \binom{j_m}{l_m} H_1^{r_1} \dots H_m^{r_m} \right| \leq$$

$$\leq c^{mr_1} \cdot 2^{2r_1} \dots 2^{2r_m} \cdot H_1^{\,r_1\left(1+m-\frac{1}{m}\right)} \leq (4c)^{mr_1} \cdot H_1^{\,r_1\left(1+m-\frac{1}{m}\right)}.$$

Cerchiamo ora un maggiorante di $| A_{(l)} |_{p_\tau}$. Si ha:

$$A_{(l)} = q_1^{r_1} \dots q_m^{r_m} \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_m=0}^{r_m} A_{j_1, \dots, j_m}(\zeta_\tau, \dots, \zeta_\tau) \binom{j_1}{l_1} \dots$$

$$\dots \binom{j_m}{l_m} (k_1 - \zeta_\tau)^{j_1-l_1} \dots (k_m - \zeta_\tau)^{j_m-l_m} =$$

$$= q_1^{r_1+l_1-j_1} \dots q_m^{r_m+l_m-j_m} \sum_{j_1=0}^{r_1} \dots \sum_{j_m=0}^{r_m} A_{j_1, \dots, j_m}(\zeta_\tau, \dots, \zeta_\tau) \binom{j_1}{l_1} \dots$$

$$\dots \binom{j_m}{l_m} (h_1 - \zeta_\tau q_1)^{j_1-l_1} \dots (h_m - \zeta_\tau q_m)^{j_m-l_m},$$

e poichè risulta:

$$| q_1^{r_1+l_1-j_1} \dots q_m^{r_m+l_m-j_m} |_{p_\tau} \leq 1,$$

$$| A_{j_1, \dots, j_m}(\zeta_\tau, \dots \zeta_\tau) |_{p_\tau} \leq | \max (1, | \zeta_\tau |_{p_\tau}) |^{mr_1},$$

$$\left| \binom{j_1}{l_1} \dots \binom{j_m}{l_m} \right|_{p_\tau} \leq 1,$$

$$| h_1 \quad \zeta_\tau q_1 |_{p_\tau}^{j_1 - l_1} \ldots | h_m - \zeta_\tau q_m |_{p_\tau}^{j_m - l_m} \leq \prod_{u=1}^{m} H_u^{-\Gamma_\tau (j_u - l_u)(2 + f(H_u))} \leq$$

$$\leq H_1^{-r_1 \Gamma_\tau \left[\left(\frac{1}{2} - s\right)\left(m + \frac{\sigma}{2}\right) - 2\Lambda\right]}$$

si ricava:

$$(21) \qquad | A_{(l)} |_{p_\tau} \leq H_1^{-2r_1 \Gamma_\tau \left[\left(\frac{1}{2} - s\right)\left(m + \frac{\sigma}{2}\right) - 2\Lambda\right]} \{\max(1, | \zeta_\tau |_{p_\tau})\}^{m r_1}$$

che è valida anche se $\Gamma_\tau = 0$, in quanto $A_{(l)}$ è intero e il 2° membro della precedente non è inferiore a 1.

Osserviamo ora che per una nota proprietà delle valutazioni p-adiche è:

$$(22) \qquad | A_{(l)} | \prod_{\tau=1}^{t} | A_{(l)} |_{p_\tau} \geq 1,$$

e inoltre si ha ([3]):

$$\prod_{\tau=1}^{t} \max \ (1, \quad \zeta_\tau |_{p_\tau}) \leq B.$$

Allora dalla (22), tenuto conto delle (20) e (21), si ottiene:

$$(4c_1)^{m r_1} \cdot \mathrm{H}_1^{r_1 \left\{ 1 + m - \frac{1}{m} - 2\left[\left(\frac{1}{2} - s\right)\left(m + \frac{\sigma}{2}\right) - 2\Lambda\right] \right\}} \cdot B^{m r_1} \geq 1,$$

da cui:

$$(4Bc_1)^m \geq \mathrm{H}_1^{2\left[\left(\frac{1}{2} - s\right)\left(m + \frac{\sigma}{2}\right) - 2\Lambda\right] - 1 - m + \frac{1}{m}}.$$

Intanto, per la 2ª delle (6), per la (10) e per la (16), quando m è sufficientemente grande, si ha:

$$2\left[\left(\frac{1}{2} - s\right)\left(m + \frac{\sigma}{2}\right) - 2\,\Lambda\right] - 1 - m + \frac{1}{m} \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - s\right)(2m + \sigma) - 5 - m + \frac{1}{m} \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{\sqrt{m}}\right)(2m + 5a\sqrt{m}) - 5 - m + \frac{1}{m} =$$

$$= \frac{1}{2}\, a\sqrt{m} + \frac{1}{m} - 5(a^2 + 1) > \frac{1}{4}\, a\sqrt{m}.$$

([3]) Si veda [1], 701.

Quindi, quando m è opportunamente grande, sarà:

$$(4Bc_1)^m \geq H_1^{\frac{1}{4}a\sqrt{m}},$$

da cui

$$H_1 \leq (4Bc_1)^{\frac{4}{a}\sqrt{m}},$$

la quale, per m abbastanza grande, contrasta con l'ipotesi:

$$H_1 \geq e^{\frac{2}{\delta}m^3}.$$

Da questo assurdo discende il Lemma 3.

Mediante il Lemma 3, con considerazioni del tutto simili a quelle contenute nel n. 6 di [3] si dimostra infine il nostro teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. MAHLER, *Zur Approximation algebraischer Zahlen*, Math. Annalen, 107 (1933), 691-730.

[2] — —, *Lectures on diophantine approximations*, Univ. Notre Dame (1961).

[3] G. RODRIQUEZ, *Approssimabilità di irrazionali p-adici mediante numeri razionali*, Rend Ist. Lomb., Cl. Sc., (A) 98 (1964), 691-708.

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I. l' 11 giugno 1965.