Bollettino Unione Matematica Italiana

Giulia Martini

Sulle trasformazioni puntuali fra tre piani.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.2, p. 227–231.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_227_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

Sulle trasformazioni puntuali fra tre piani

GIULIA MARTINI (Bologna) [1]

Sunto. - *Si espongono alcuni risultati relativi all'approssimazione (in terne regolari) delle trasformazioni puntuali fra tre piani mediante trasformazioni quadratiche di Godeaux.*

1. - In una Nota recente, M. VILLA ha considerato le trasformazioni puntuali fra tre o più spazi lineari ed ha messo in luce come, nei problemi relativi all'approssimazione del 2° ordine con le trasformazioni da lui chiamate di GODEAUX, sia utile ricorrere alla rappresentazione sulla varietà di SEGRE.

Inoltre il VILLA ha illustrato le osservazioni svolte esaminando il caso più semplice, quello delle trasformazioni puntuali fra tre rette [2].

In un lavoro in corso di pubblicazione nei Rend. dell'Accademia delle Scienze di Bologna ho studiato il problema dell'approssimazione delle trasformazioni puntuali fra tre piani π_1, π_2, π_3 con le trasformazioni quadratiche (di GODEAUX) [3] mediante la rappresentazione sulla varietà di SEGRE relativa ai tre piani. Nella presente Nota espongo i risultati conseguiti in tale lavoro rimandando, per le dimostrazioni, al lavoro stesso.

2. - Sia $\mathcal{C}$ una trasformazione (o corrispondenza) puntuale fra tre piani π_1, π_2, π_3 e sia O_1, O_2, O_3 una terna di punti corrispondenti.

Assumiamo O_1, O_2, O_3 come origini delle coordinate cartesiane (o proiettive) su π_1, π_2, π_3 e indichiamo rispettivamente con x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2 tali coordinate (non omogenee) su π_1, π_2, π_3.

La trasformazione $\mathcal{C}$ sarà rappresentata da equazioni del tipo

$$z_1 = f_1(x_1, x_2; y_1, y_2), \qquad z_2 = f_2(x_1, x_2; y_1, y_2), \tag{1}$$

dove le funzioni f_1, f_2 si suppongono sviluppabili in serie di po-

(1) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca Matematica n. 26 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali fra tre o più spazi lineari* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Ser. III, Vol. XX, p. 87 (1965).

(3) M. VILLA, op. cit. nella (2), n. 2

tenze nell'intorno dei punti O_1 $(0, 0)$, O_2 (0.0) [4].

Sia T_1 la trasformazione fra i piani π_2, π_3 nella quale si corrispondono le coppie di punti (dei due piani) che assieme al punto O_1 costituiscono terne di punti corrispondenti nella data trasformazione $\mathcal{C}$. Analogamente sia T_2 la trasformazione fra i piani π_1, π_3 nella quale si corrispondono le coppie di punti che assieme al punto O_2 costituiscono terne di punti corrispondenti nella data trasformazione $\mathcal{C}$.

Supporremo che la coppia (O_2, O_3) sia regolare per T_1 e che la coppia (O_1, O_3) sia regolare per T_2 [5].

Assumiamo nel piano π_1 cone rette $x_1=0$, $x_2=0$, $x_1=x_2$ le tre rette caratteristiche per O_1 della T_2. Analogamente assumiamo nel piano π_3 come rette $z_1=0$, $z_2=0$, $z_1=z_2$ le tre rette caratteristiche per O_3 della T_2 corrispondenti rispettivamente alle rette $x_1=0$, $x_2=0$, $x_1=x_2$ [6].

Assumiamo inoltre nel piano π_1 come punto fondamentale $(1, 0,0)$ del riferimento proiettivo, il punto corrispondente, nella proiettività caratteristica (relativa a T_2) fra la coppia di rette caratteristiche $x_2=0$, $z_2=0$, del punto $(1, 0, 0)$ di π_3. Analogamente assumiamo nel piano π_1 come punto $(0, 1, 0)$ il punto corrispondente, nella proiettività caratteristica (relativa a T_2) fra la coppia di rette caratteristiche $x_1=0$, $z_1=0$, del punto $(0, 1, 0)$ di π_3.

Assumiamo inoltre come punto $(-1, -1, 1)$ in π_1 il punto corrispondente, nella proiettività caratteristica (relativa a T_2) fra la coppia di rette caratteristiche $x_1=x_2$, $z_1=z_2$, del punto $(1, 1, 0)$

(4) Più generalmente una corrispondenza fra i tre piani è rappresentata da equazioni del tipo

$$(2) \qquad F_1(x_1, x_2;\, y_1, y_2;\, z_1, z_2)=0, \qquad F_2(x_1, x_2;\, y_1, y_2;\, z_1, z_2)=0$$

dove le F_1, F_2 ammettono derivate parziali prime continue. Supposto lo Jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

nell'intorno della terna di punti corrispondenti O_1, O_2, O_3, le (2) possono scriversi nella forma (1).

(5) In queste ipotesi diremo che la terna (O_1, O_2, O_3) è *regolare* per $\mathcal{C}$

(6) Si suppone che le tre direzioni caratteristiche per O_1 (per O_3) nella trasformazione T_2 siano tutt'e tre distinte.

di π_3. Assumiamo infine come punto unità in π_3 il punto corrispondente, nella proiettività caratteristica (relativa a T_2) fra la coppia di rette caratteristiche $x_1 = x_2$, $z_1 = z_2$, del punto $(1, 1, 0)$ di π_1. Nel piano π_2 assumiamo come rette $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_1 = y_2$ le rette rispettivamente corrispondenti alle rette $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_1 = z_2$ nella proiettività determinata fra i fasci di centri O_2, O_3 dalla T_1.

Con questa scelta dei riferimenti proiettivi nei tre piani π_1, π_2, π_3 le equazioni (1) della trasformazione possono scriversi (7)

$$(3) \quad \begin{aligned} z_1 &= x_1 + \beta y_1 - x_1 x_2 + \Sigma\, d^1{}_{ik} y_i y_k + \Sigma\, p^1{}_{ik} x_i y_k + [3] \\ z_2 &= x_2 + \beta y_2 - x_1 x_2 + \Sigma\, d^2{}_{ik} y_i y_k + \Sigma\, p^2{}_{ik} x_i y_k + [3] \end{aligned}$$

essendo β, $d^1{}_{ik}$, $p^1{}_{ik}$, $d^2{}_{ik}$, $p^2{}_{ik}$ costanti e indicando con [3] l'insieme dei termini in x_1, x_2, y_1, y_2 di grado superiore al secondo $(i, k = 1, 2)$ $(\beta \neq 0)$ (8).

La varietà di SEGRE rappresentativa delle terne di punti dei tre piani π_1, π_2, π_3 è la V_6 (d'ordine 90) appartenente allo spazio proiettivo S_{26} che ha le equazioni parametriche (9)

$$\begin{aligned} X_{ikl} &= x_i y_k z_l \\ \overset{1}{X}_{ik} &= x_i y_k \\ \overset{2}{X}_{ik} &= x_i z_k \\ \overset{3}{X}_{ik} &= x_i z_k \\ \overset{1}{X}_i &= x_i \\ \overset{2}{X}_i &= y_i \\ \overset{3}{X}_i &= z_i \\ X_0 &= 1, \end{aligned}$$

essendo le X_0, $\overset{1}{X}_i$, $\overset{2}{X}_i$, $\overset{3}{X}_i$, $\overset{1}{X}_{ik}$, $\overset{2}{X}_{ik}$, $\overset{3}{X}_{ik}$, X_{ikl} le coordinate proiettive in S_{26} $(i, k, l = 1, 2)$.

(7) M. VILLA, *Lezioni di Geometria*, Vol. II, Cedam, Padova, pp. 305. 307, 310 (1962).

(8) Essendo la coppia $(O_2\ O_3)$ regolare per T_1 è $\beta \neq 0$.

(9) C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi,* Rend. del Circolo Matematico di Palermo, Vol. V, p. 192 (1891).

Considerata la V_4 rappresentativa di $\mathcal{C}$ sulla V_6 di SEGRE e il punto P (di V_4) rappresentativo della terna O_1, O_2, O_3, l'S (1) osculatore in P alla V_4 è individuato dal punto P e dai punti derivati primi P_{x_1}, P_{x_2}, P_{y_1}, P_{y_2} [10] mentre l'S (2) osculatore in P alla V_4 è individuato dal punto P, dai punti derivati primi suddetti e dai punti derivati secondi $P_{x_1x_2}$, $P_{x_2x_2}$, $P_{y_1y_1}$, $P_{y_2y_2}$, $P_{x_1y_1}$, $P_{x_1y_2}$, $P_{x_2y_1}$, $P_{x_2y_2}$, $P_{x_1x_2}$, $P_{y_1y_2}$.

Essendo la terna O_1, O_2, O_3 regolare ($\beta \neq 0$), si dimostra che i quindici punti suddetti sono linearmente indipendenti. L'$S(2)$ osculatore in P alla V_4 è dunque regolare, cioè è un S_{14}.

Nell'S_{26} ambiente, gli S_{24} che passano per questo S_{14} sono ∞^{20}. D'altra parte ciascuno di tali S_{24} sega la V_6 di SEGRE in una V_4 che rappresenta una trasformazione quadratica di GODEAUX [11] che oscula la data trasformazione $\mathcal{C}$ nella terna di punti corrispondenti O_1, O_2, O_3 [12].

Possiamo quindi concludere:

Data una trasformazione puntuale fra tre piani, esistono ∞^{20} trasformazioni quadratiche di Godeaux che la osculano in una terna regolare di punti corrispondenti.

Si trova che le ∞^{20} trasformazioni quadratiche di GODEAUX osculatrici in (O_1, O_2, O_3) a $\mathcal{C}$, sono rappresentate dal sistema di

(10) La V_4 ha in P un punto semplice.

(11) M. VILLA, op. cit. nella (2), n. 2.

(12) Due trasformazioni puntuali fra i piani π_1, π_2, π_3

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \Sigma c^1_{ik}x_ix_k + \Sigma d^1_{ik}y_iy_k + \\ \qquad + \Sigma p^1_{ik}x_iy_k + [3] \\ z_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \Sigma c^2_{ik}x_ix_k + \Sigma d^2_{ik}y_iy_k + \\ \qquad + \Sigma p^2_{ik}x_iy_k + [3] \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + b'_{11}y_1 + b'_{12}y_2 + \Sigma c^{1'}_{ik}x_ix_k + \Sigma d^{1'}_{ik}y_iy_k + \\ \qquad + \Sigma p^{1'}_{ik}x_iy_k + [3] \\ z_2 = a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + b'_{21}y_1 + b'_{22}y_2 + \Sigma c^{2'}_{ik}x_ix_k + \Sigma d^{2'}_{ik}y_iy_k + \\ \qquad + \Sigma p^{2'}_{ik}x_iy_k + [3], \end{cases}$$

quando i due sviluppi di z_1 e i due sviluppi di z_2 coincidono fino ai terequazioni

$$
\begin{aligned}
&\Sigma\, \lambda_{ikl}\, x_i\, y_k\, z_l + \lambda_1 \left[(\beta y_2 - z_2) x_1 - (\beta y_1 - z_1) x_2\right] + \lambda_2 \left[(x_1 - z_1) y_2 - \right.\\
&\quad \left. - (x_2 - z_2) y_1\right] + \lambda_3 \left[\frac{1}{\beta} \Sigma\, \overset{1}{d}_{ii}\, x_i\, y_i - \Sigma\, \overset{1}{p}_{ik}\, x_i y_k - \frac{1}{\beta} \Sigma\, \overset{1}{d}_{ii}\, y_i\, z_i + \right.\\
&\quad \left. + \frac{2\, \overset{1}{d}_{12}}{\beta} (x_1 - z_1)\, y_2 + x_1 z_2 - \beta x_1 y_2 - x_1 - \beta y_1 + z_1 \right] + \\
&\quad + \lambda_4 \left[\frac{1}{\beta} \Sigma\, \overset{2}{d}_{ii}\, x_i\, y_i - \Sigma\, \overset{2}{p}_{ik}\, x_i y_k - \frac{1}{\beta} \Sigma\, \overset{2}{d}_{ii}\, y_i\, z_i + \frac{2\, \overset{2}{d}_{12}}{\beta} (x_1 - z_1)\, y_2 + \right.\\
&\left. + x_1 z_2 - \beta x_1 y_2 - x_2 - \beta y_2 + z_2 \right] = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Sigma\, \mu_{ikl}\, x_i\, y_k\, z_l + \mu_1 \left[(\beta y_2 - z_2) x_1 - (\beta y_1 - z_1) x_2\right] + \mu_2 \left[(x_1 - z_1) y_2 - \right.\\
&\quad \left. - (x_2 - z_2) y_1\right] + \mu_3 \left[\frac{1}{\beta} \Sigma\, \overset{1}{d}_{ii}\, x_i\, y_i - \Sigma\, \overset{1}{p}_{ik}\, x_i y_k - \frac{1}{\beta} \Sigma\, \overset{1}{d}_{ii}\, y_i\, z_i + \right.\\
&\quad \left. + \frac{2\, \overset{1}{d}_{12}}{\beta} (x_1 - z_1)\, y_2 + x_1 z_2 - \beta x_1 y_2 - x_1 - \beta y_1 + z_1 \right] + \\
&\quad + \mu_4 \left[\frac{1}{\beta} \Sigma\, \overset{2}{d}_{ii}\, x_i\, y_i - \Sigma\, \overset{2}{p}_{ik}\, x_i y_k - \frac{1}{\beta} \Sigma\, \overset{2}{d}_{ii}\, y_i\, z_i + \frac{2\, \overset{2}{d}_{12}}{\beta} (x_1 - z_1)\, y_2 + \right.\\
&\left. + x_1 z_2 - \beta x_1 y_2 - x_2 - \beta y_2 + z_2 \right] = 0,
\end{aligned}
$$

dove λ_{ikl}, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, μ_{ikl}, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 sono parametri ($i, k, l = 1, 2$).

Infine si dimostra che:

L'intersezione dell'S (2) osculatore in P alla V_4 con la V_6 di Segre è costituita dalle nove coniche che rappresentano le nove proiettività caratteristiche fra le coppie di rette caratteristiche relative alle trasformazioni T_1, T_2 e alla trasformazione T_3 fra i piani π_1, π_2 in cui si corrispondono le coppie di punti che assieme al punto O_3 costituiscono terne di punti corrispondenti in $\mathfrak{C}$.

mini di grado h, si dirà che si approssimano nell'intorno di ordine h della terna (O_1, O_2, O_3) o anche che hanno nella terna (O_1, O_2, O_3) un contatto d'ordine h. Se $h = 2$ si dirà che le due traformazioni si osculano nella terna (O_1, O_2, O_3).

La nozione di contatto ha carattere invariante per trasformazioni regolari qualunque sui tre piani.

Pervenuto alla Segreteria dell' U.M.I.
il 10 giugno 1960