Piero Mangani

Estensioni libere di un'algebra di Boole.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.2, p. 210–219.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_210_0>

Estensioni libere di un'algebra di Boole

PIERO MANGANI (Firenze) (*)

Sunto. - *Nella presente nota si definisce un concetto di estensione libera di un'algebra di Boole e si mostrano alcune connessioni fra tale concetto e quelli di retratto, algebra libera, algebra proiettiva.*

Premessa.

La nozione di algebra di BOOLE «libera» presenta notevole interesse sia in algebra, sia in logica. Basterà qui ricordare che l'algebra di LINDENBAUM-TARSKI del calcolo degli enunciati è un'algebra (di BOOLE) libera e che questo risultato ha importanti conseguenze metamatematiche.

È naturale, quindi, che tali algebre siano state oggetto di particolari attenzioni e lo siano tuttora, anche a causa dell'esistenza di un certo numero di problemi aperti relativi ad esse.

La presente nota è dedicata alla definizione ed allo studio di un concetto di «estensione libera» di un'algebra di BOOLE. Si vedrà che questo concetto presenta, fra l'altro, strette connessioni con i concetti booleani di «retratto», «algebra libera», «algebra proiettiva».

Riportiamo ora alcuni risultati che ci saranno utili nel seguito.

Un *campo d'insiemi* è un sistema: $I = (J, \bigcup, \bigcap, -; \emptyset, S)$ in cui:

S è un insieme (non vuoto)

$\bigcup$, $\bigcap$, $-$, sono le operazioni insiemistiche di «unione», «intersezione», «complementazione (rispetto ad S)»

J è un sottoinsieme dell'insieme potenza di S, chiuso rispetto alle operazioni $\bigcup$, $\bigcap$, $-$.

$\emptyset \in J$

Ogni campo d'insiemi è un'algebra di BOOLE.

Il teorema di rappresentazione per le algebre di BOOLE (STONE [4]) ci assicura, viceversa, che ogni algebra di BOOLE è isomorfa

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R., per l'anno 1964-65 (Gruppo n. 37).

ad un campo d'insiemi. È noto infatti che, se indichiamo con F_A l'insieme di tutti i filtri massimali di un'algebra di BOOLE $A(=(\mathfrak{A}, +, \cdot, '; 0, 1))$, l'applicazione λ di A in $\mathfrak{B}(F_A)$ (¹) definita da

$$\lambda x = \{ p : p \in F_A, \ x \in p \}$$

risulta un monomorfismo di A in $\mathfrak{B}(F_A)$.

Assumendo l'insieme $\{ \lambda x : x \in A \}$ come base di aperti per una topologia su F_A, F_A diviene uno spazio topologico compatto e totalmente sconnesso (²); tale spazio prende il nome di *spazio duale* di A. Lo indicheremo nel seguito con il simbolo S_A.

Risulta allora che ad ogni algebra di BOOLE A è associato uno (e, a meno di omeomorfismi, uno solo) spazio topologico S_A, compatto e totalmente sconnesso, tale che A è isomorfa al campo dei sottoinsiemi chiusi-aperti (*clopen*) di S_A.

Se X è un sottoinsieme (non vuoto) di S_A, l'applicazione f di A in $\mathfrak{B}(X)$ definita da: $fx = \lambda x \cap X$, risulta un omomorfismo di A in $\mathfrak{B}(X)$. Se (e solo se) X è denso in S_A, f risulta un monomorfismo (di A in $\mathfrak{B}(X)$). In tal caso la coppia (X, f) sarà detta una *rappresentazione ridotta* di A. Se, in particolare, $X = F_A$, la coppia (F_A, λ) sarà detta *rappresentazione* (*ridotta*) *perfetta di A*.

Se B è un'algebra di BOOLE ed A una sua sottoalgebra, per *estensione* di A con un elemento a di B s'intende la sottoalgebra di B i cui elementi sono tutti e soli gli elementi (di B) della forma: $x \cdot a + y . a'$, con x, y in A. Tale estensione sarà indicata con il simbolo $A(a)$.

Un elemento a di un'algebra di BOOLE B è detto *indipendente* da una sottoalgebra A di B allorchè, per ogni $x \in A$, $x \neq 0$, si ha: $x \cdot a \neq 0$, $x \cdot a' \neq 0$.

Se $\mathfrak{M}$ è un insieme di elementi di un'algebra di BOOLE B, con $\mathfrak{M}'$ indicheremo l'insieme: $\{ x' : x \in \mathfrak{M} \}$.

Un insieme $\mathfrak{M}$ di elementi di B è detto un *insieme di elementi indipendenti* (brevemente: *un insieme indipendente*) allorchè $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}' = \emptyset$ e, per ogni sottoinsieme *finito* H di $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}'$, si ha: $\bigwedge_{x \in H} x = 0$ (³) *solo se* esistono due elementi $\bar{x}$, $\bar{y}$ di H tali che: $\bar{x} = \bar{y}'$.

(¹) Se S è un'insieme, con il simbolo $\mathfrak{B}(S)$ indichiamo il campo di tutti i sottoinsiemi di S.

(²) Vedere, ad esempio, DWINGER [1].

(³) Se B è un'algebra di BOOLE ed F è una famiglia di elementi di B che ammette *supremo* (*infimo*), indicheremo tale supremo (infimo) con il simbolo: $\bigvee_{x \in F} x$ ($\bigwedge_{x \in F} x$). Se F è una famiglia finita di elementi di B essa ammette sempre supremo e infimo.

Un' algebra di BOOLE B si dice *libera* allorchè esiste un insieme G di generatori di B tale che ogni applicazione di G in una algebra di BOOLE A possa essere estesa ad un (unico) omomorfismo di B in A. G si dice allora un *insieme di generatori liberi.* È noto (Cfr. SIKORSKI [3]) che G è un insieme di generatori liberi se e solo se G è un insieme di generatori indipendenti.

Ricordiamo infine che per ogni cardinale μ esiste una (e, a meno di isomorfismi, una sola) algebra di BOOLE libera su μ generatori.

1. - Poniamo la seguente definizione:

Def. 1. - *Un' algebra di* BOOLE B *si dice estensione libera di una algebra (di* BOOLE*), A, allorchè esistono una sottoalgebra, A^*, di B, isomorfa ad A ed una sequenza* $\{a_\nu\}_{0<\nu<\alpha}$ (⁴) *di elementi di B tali che:*

i) $B = \bigcup_{\nu<\alpha} A_\nu$, *dove* $\{A_\nu\}_{\nu<\alpha}$ *è la sequenza di sottoalgebre di B così definita:* $A_0 = A^*$; $A_k = A_{k-1}(a_k)$, *se k è un ordinale successore;*

$A_k = \overline{A}(a_k)$, *dove* $\overline{A} = \bigcup_{\rho<k} A_\rho$, *se k è un ordinale limite.*

ii) a_ν *è indipendente da* A_μ, *per ogni* $\mu < \nu$.

Sia, ad esempio, A un' algebra di BOOLE tale che il suo spazio duale S_A sia l'unione di due sottoinsiemi densi e disgiunti, X e $-X$ (è facile provare che algebre con tale proprietà esistono; naturalmente sono prive di atomi).

Se $\widehat{A}$ è l'algebra duale di A (il campo, cioè, dei clopen di S_A), allora $\widehat{A}(X)$ risulta estensione libera di A: X è infatti indipendente da $\widehat{A}$, essendo sia X sia $-X$ densi in S_A.

Ci proponiamo ora di studiare alcune proprietà del concetto introdotto.

Siano A ed $\overline{A}$ due algebre di BOOLE isomorfe e siano B e $\overline{B}$, rispettivamente, estensioni libere di A ed $\overline{A}$. Per la definizione 1 esisteranno una sottoalgebra A^* di B, isomorfa ad A, ed una sequenza $\{a_\nu\}_{0<\nu<\alpha}$ di elementi di B soddisfacenti i) e ii). Analogamente, esisteranno una sottoalgebra $\overline{A}^*$ di $\overline{B}$, isomorfa ad $\overline{A}$, ed una sequenza $\{\overline{a}_\nu\}_{0<\nu<\overline{\alpha}}$ di elementi di $\overline{B}$, soddisfacenti i) e ii). Ovviamente, A^* ed $\overline{A}^*$ risultano isomorfe.

(⁴) Con α indichiamo un ordinale (finito o transfinito). Scriveremo Card α per indicare il cardinale di α.

Vogliamo provare che, sotto queste ipotesi, si ha:

TEOREMA 1. – *Se Card* $\bar{\alpha} =$ *Card* α, *B e* $\bar{B}$ *sono isomorfe.*

DIM. – Sia f un isomorfismo di A^* su $\bar{A}^*$. È facile provare che f può essere esteso, passo a passo con il consueto procedimento di induzione transfinita, ad un isomorfismo di B su $\bar{B}$.

Il primo passo della dimostrazione consiste nel riordinare la sequenza $\{\bar{a}_\nu\}_{0<\nu<\bar{\alpha}}$ in modo da ottenerne una di tipo ordinale α. Sia $\{\bar{b}_\nu\}_{0<\nu<\alpha}$ la sequenza così ottenuta. Tenuto conto della condizione ii) della definizione 1, si controlla facilmente che la:

$$f_1(x \cdot a_1 + y \cdot a_1') = fx \cdot \bar{b}_1 + fy \cdot \bar{b}_1'; \; x, \; y \in A^*$$

definisce un isomorfismo di $A_1(=A^*(a_1))$ su $\bar{A}_1(=\bar{A}^*(\bar{b}_1))$, estensione dell'isomorfismo f. È ovvio allora come f possa essere esteso, per induzione transfinita, ad un isomorfismo di B su $\bar{B}$.

Notiamo infine che il riordinamento della sequenza $\{\bar{a}_\nu\}_{0<\nu<\bar{\alpha}}$ nella sequenza $\{\bar{b}_\nu\}_{0<\nu<\alpha}$ non altera, per $\bar{B}$, le condizioni i) e ii) della definizione 1. Per i) la cosa risulta evidente. Per ii) si osservi che ogni elemento di $\{\bar{a}_\nu\}_{0<\nu<\bar{\alpha}}$ risulta indipendente dall'algebra generata da $\bar{A}^*$ e dall'insieme di tutti gli altri elementi della sequenza (5).

Il teorema è così provato (6).

La connessione fra il concetto di *estensione libera* ora introdotto ed il concetto di *algebra libera* è mostrata dai seguenti risultati:

TEOREMA 2. – *Un'algebra di* BOOLE *è libera se e solo se è estensione libera dell'algebra semplice.*

DIM. – Ricordiamo che, a meno di isomorfismi, esiste una sola algebra di BOOLE semplice, algebra che indicheremo con W.

Sia, allora, B un'algebra di BOOLE che risulti estensione libera

(5) Osserviamo che la definizione di estensione libera poteva essere data nel seguente modo (ovviamente equivalente): Un'algebra B si dice estensione libera di un'algebra A allorchè esistono una sottoalgebra A^* di B, isomorfa ad A, ed un sottoinsieme I di elementi di B tali che: i') L'insieme $A^* \cup I$ generi B; ii') Ogni elemento x di I risulti indipendente dall'algebra generata dall'insieme $A^* \cup (I - \{x\})$;

(6) Si confronti il concetto introdotto con i concetti di *prodotto booleano* e di *somma libera* (Cfr. SIKORSKI [3], HALMOS [2]).

di W; esisterà quindi una sequenza $\{a_\nu\}_{0<\nu<\alpha}$ di elementi di B, nelle condizioni della definizione 1. L'insieme G degli elementi di tale sequenza costituisce ovviamente un insieme di generatori indipendenti, e quindi di generatori liberi, per B, che risulta allora un'algebra libera.

Viceversa, sia B un'algebra libera: B ammette un sottoinsieme G di generatori liberi, quindi indipendenti. Ordiniamo gli elementi di G in una sequenza $\{a_\nu\}_{0<\nu<\alpha}$. È immediato che B soddisfa le condizioni della definizione 1, con $A^* = W$, e che quindi risulta estensione libera di W.

COROLLARIO 1. – *Se un'algebra di* BOOLE *B è estensione libera di un'algebra libera, allora B è un'algebra libera.*

DIM.: ovvia.

Dai teoremi 1 e 2 segue subito il ben noto risultato che, se B e B^* sono algebre libere sugli insiemi G e G^* di generatori (liberi) rispettivamente ed inoltre Card $G =$ Card G^*, allora B e B^* sono isomorfe.

Sia ora B un'algebra di BOOLE che risulti estensione libera di un'algebra A. Se A^* è la sottoalgebra di B di cui alla definizione 1, vale il seguente teorema:

TEOREMA 3. – *Ogni omomorfismo di A^* in un'algebra di* BOOLE *C può essere esteso ad un omomorfismo di B in C.*

DIM. – Sia f un omomorfismo di A^* in C. Dobbiamo dimostrare che esiste un omomorfismo φ di B in C, la cui restrizione ad A^* coincide con f.

La dimostrazione avviene per induzione transfinita. Il primo passo è il seguente: per la definizione 1 esisterà una sequenza di elementi di B, $\{a_\nu\}_{0<\nu<\alpha}$, soddisfacente le condizioni i) e ii). Tenuto conto di quest'ultima, la: $f_1(x \cdot a_1 + y \cdot a_1') = fx \cdot \alpha + fy \cdot \alpha'$, con x, y elementi di A^* ed α elemento *qualsiasi* di C, definisce un omomorfismo di $A_1 (= A^*(a_1))$ in C, estensione di f. E' evidente come possa allora costruirsi un omomorfismo φ di B in C, che sia estensione di f.

Ricordiamo ora che, se B ed A sono algebre di BOOLE, A è detta *retratto* di B allorchè esistono un monomorfismo g di A in B ed un epimorfismo f di B su A tali che fg sia l'identità su A.

Il concetto può essere illustrato dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "f"] & \\ & A \\ A \arrow[uu, "g"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd} \qquad (j \text{ identità su } A)$$

Dal teorema 3 segue allora il seguente corollario:

COROLLARIO 2. – *Se B è estensione libera di A, allora A è retratto di B.*

DIM: Se B è estensione libera di A esiste una sottoalgebra A^* di B, isomorfa ad A, nelle condizioni della definizione 1. Sia f un isomorfismo di A su A^*. Si consideri allora l'isomorfismo f^{-1} di A^* su A. Per il teorema 3 esisterà un omomorfismo φ di B su A, estensione di f^{-1}. Ma allora esistono un monomorfismo f di A in B ed un epimorfismo φ di B su A tali che φf è l'identità su A; A è dunque un retratto di B ed il corollario è dimostrato [7].

Sia ora B estensione libera di A e siano A^* e $\{a_\nu\}_{0<\nu<\alpha}$ rispettivamente una sottoalgebra di B ed una sequenza di elementi di B nelle condizioni della definizione 1. Indichiamo con μ il cardinale di α e con L_μ l'algebra di BOOLE libera su μ generatori (liberi).

Si ha allora il seguente teorema:

TEOREMA 4. – *L_μ è un retratto di B.*

DIM. – Osserviamo, in primo luogo, che la sottoalgebra di B generata dall'insieme degli elementi di $\{a_\nu\}_{0<\nu<\alpha}$ è un'algebra di BOOLE libera su μ generatori e risulta quindi isomorfa ad L_μ. Indicheremo tale sottoalgebra di B con L_μ^*.

Sia ora G un insieme di generatori liberi di L_μ ed ordiniamo gli elementi di G in una sequenza $\{b_\nu\}_{0<\nu<\alpha}$. Sia ψ l'isomorfismo

[7] Si osservi che l'inverso del corollario 2 non vale: ad esempio, l'algebra semplice W è retratto di *ogni* algebra di BOOLE, mentre solo le algebre libere sono estensioni libere di W.

di L_μ su L_μ^* tale che: $\psi(b_\nu) = a_\nu$, per ogni $\nu < \alpha$. Resta da provare che esiste un epimorfismo φ di B su L_μ, tale che $\varphi\psi$ è l'identità su L_μ.

Sia, per questo, f un omomorfismo di A^* sulla sottoalgebra semplice, W, di L_μ. Consideriamo ora l'omomorfismo f_1, di $A_1(=A^*(a_1))$ su $W(b_1)$, definito da:

$$f_1(x\cdot a_1 + y\cdot a_1') = fx\cdot b_1 + fy\cdot b_1'; \ x, y \in A^*.$$

(È facile vedere che f_1 risulta un'estensione di f). È ovvio allora come possa costruirsi, procedendo per induzione transfinita, un omomorfismo φ di B *su* L_μ. Poichè, infine, per ogni $\nu < \alpha$, si ha: $\varphi\psi(b_\nu) = b_\nu$, segue che $\varphi\psi$ è l'identità su L_μ ed il teorema è dimostrato.

2. – Il concetto di estensione libera introdotto in 1) ed i teoremi ivi dimostrati permettono di ritrovare alcuni risultati relativi alle algebre libere e di connettere il concetto di estensione libera al concetto di algebra di Boole proiettiva.

Abbiamo infatti i seguenti teoremi:

TEOREMA 5. - *Un'algebra di* BOOLE *finita è estensione libera di una sua sottoalgebra (propria) se e solo se il numero dei suoi atomi è pari.*

DIM. – Sia B un'algebra di Boole finita, estensione libera di una sua sottoalgebra A, la quale abbia $k(>0)$ atomi. Se $\{a_\nu\}_{0<\nu<n+1}$ è una sequenza (finita) di elementi di B, nelle condizioni della definizione 1, è facile vedere che gli atomi di $A_1(=A(a_1))$ sono tutti e soli gli elementi della forma: $\alpha\cdot a_1$, $\alpha\cdot a_1'$, con α atomo di A. Segue allora che B ha $2^n\cdot k$ atomi.

Viceversa, se un'algebra di Boole B, finita, ha $2\cdot m(m>0)$ atomi, essa risulta un'estensione libera, con un solo elemento indipendente, dell'algebra finita con m atomi.

Dal teorema ora dimostrato segue, tenuto conto del teorema 2, il noto risultato che un'algebra libera su un numero finito n di generatori ha 2^n atomi e quindi 2^{2^n} elementi, e viceversa che una algebra finita con 2^n atomi è un'algebra libera (su n generatori).

TEOREMA 6. – *L'algebra di* BOOLE *libera su un'infinità numerabile di generatori,* $L_{\aleph_0}$, *è estensione libera di ogni algebra finita o numerabile (quindi di ogni sua sottoalgebra).*

DIM.: Ricordiamo in primo luogo che l'algebra libera numerabile è priva di atomi e che tutte le algebre numerabili prive di atomi sono isomorfe ad $L_{\aleph_0}$. Inoltre ogni algebra finita o numerabile è (isomorfa a una) sottoalgebra di $L_{\aleph_0}$ (Cfr. SIKORSKI [3]).

Sia ora A un'algebra di BOOLE finita o numerabile; consideriamo un insieme di generatori liberi di $L_{\aleph_0}$ ed ordiniamoli in una sequenza: $\{a_\nu\}_{0\leq\nu<2\omega}$.

La sottoalgebra di $L_{\aleph_0}$ generata dagli elementi della sequenza $\{a_\nu\}_{0<\nu<\omega}$ è ovviamente libera e quindi isomorfa ad $L_{\aleph_0}$. Indicheremo tale algebra con $L^*_{\aleph_0}$. *Sia* A^* una sottoalgebra di $L^*_{\aleph_0}$ isomorfa ad A. Consideriamo ora l'estensione di A^* mediante gli elementi della sequenza $\{a_\nu\}_{\omega\leq\nu<2\omega}$; si controlla subito che tale estensione è priva di atomi e quindi isomorfa ad $L_{\aleph_0}$; inoltre è, ovviamente, estensione libera di A^*(def. 1). $L_{\aleph_0}$ risulta quindi estensione libera di A ed il teorema è dimostrato.

Da questo teorema segue, tenuto conto del corollario 2, che ogni algebra finita o numerabile è retratto di $L_{\aleph_0}$ risultato, d'altra parte, ben noto (Cfr. HALMOS [2]).

Vogliamo ora trovare alcune connessioni fra i concetti di estensione libera e di algebra proiettiva. Ricordiamo, allo scopo, che un'algebra di BOOLE C si dice proiettiva se, ad ogni epimorfismo g di un'algebra di BOOLE B su di un'algebra di BOOLE A e ad ogni omomorfismo h di C in A, corrisponde un omomorfismo f di C in B tale che: $gf = h$.

Il concetto può essere illustrato dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A & \\ & C \arrow[ul, "h"'] \arrow[dl, "f"] \\ B \arrow[uu, "g"] & \end{tikzcd}$$

(Si noti che A è immagine omomorfa di B).

Vale il seguente risultato fondamentale: *Un'algebra di* BOOLE *C è proiettiva se e solo se è retratto di un'algebra libera* (Cfr. HALMOS [2]).

Si ha ora il segente teorema:

TEOREMA 7. – *Se un'algebra di* BOOLE *B è estensione libera di un'algebra di* BOOLE *A, allora B è proiettiva se e solo se lo è A.*

Dim. – Sia B proiettiva; per il corollario 2, A risulta retratto di B e quindi (Cfr. Halmos [2]) proiettiva.

Viceversa, sia A un'algebra di Boole proiettiva e sia B estensione libera di A. Esisterà allora una sottoalgebra A^* di B, nelle condizioni della definizione 1. Essendo A^* isomorfa ad A, A^* risulterà ovviamente proiettiva. Siano allora $\bar{A}$ e $\bar{B}$ due algebre di Boole e g un epimorfismo di $\bar{B}$ su $\bar{A}$. Vogliamo provare che, ad ogni omomorfismo h di B in $\bar{A}$, corrisponde un omomorfismo f di B in $\bar{B}$, tale che: $gf = h$.

Sia h^* la restrizione di h ad A^*. Poichè A^* è proiettiva, esisterà un omomorfismo f^* di A^* in $\bar{B}$ tale che: $gf^* = h^*$. Tenuto conto del fatto che B è estensione libera di A^*, è una semplice questione di calcolo provare, per induzione transfinita, che f^* ammette una estensione f a B tale che: $gf = h$. B è allora proiettiva ed il teorema è dimostrato.

Si consideri per chiarezza il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\bar{A} & & B \arrow[ll, "h"'] \arrow[ddll, dashed, "f"'] \\
& & \\
\bar{B} \arrow[uu, "g"] & & A^* \arrow[ll, "f^*"] \arrow[uull, "h^*"']
\end{tikzcd}$$

Dal teorema ora dimostrato segue il ben noto risultato che ogni algebra libera è proiettiva: infatti ogni algebra libera è estensione libera dell'algebra semplice W, la quale risulta, ovviamente, proiettiva.

Si osservi infine che ogni algebra finita o numerabile risulta proiettiva (Cfr., ad esempio, il teorema 6).

3. – Concludiamo facendo le seguenti osservazioni:

a) Il teorema 6 ci assicura che partendo da *qualsiasi algebra finita o numerabile* possiamo, per estensione libera, «raggiungere», per così dire, l'algebra libera numerabile e quindi (a partire da essa) ogni algebra libera infinita. È facile vedere che ciò non accade partendo da una qualunque algebra di Boole: un'algebra B che abbia, infatti, fra le sue estensioni libere un'algebra libera è *necessariamente proiettiva* (si tenga presente il teorema 7 ed il fatto che ogni algebra libera è proiettiva).

b) Sempre il teorema 6 mette in luce una notevole proprietà di $L_{\aleph_0}$. È naturale domandarsi se esistono altre algebre di BOOLE (oltre $L_{\aleph_0}$) che risultano estensione libera di *ogni* loro sottoalgebra (evidentemente tali algebre sono libere). Escludendo l'algebra semplice, che non ha sottoalgebre proprie, possiamo notare che l'algebra di 4 elementi ha la proprietà in esame. *Nessun'altra* algebra libera finita può invece essere estensione libera di *ogni* sua sottoalgebra: infatti un'algebra libera su $n (> 1)$ generatori ha come sottoalgebra l'algebra di 8 elementi (la quale ha 3 atomi) e non può quindi risultare estensione libera di essa.

Resta aperto il problema dell'esistenza e della caratterizzazione di algebre libere infinite, non numerabili, che godano della proprietà in esame.

È interessante osservare che un'algebra di BOOLE che risulti estensione libera di ogni sua sottoalgebra ha la proprietà che ogni sua sottoalgebra è anche suo retratto, quindi proiettiva. Il nostro problema appare così collegato al seguente problema posto da Halmos (HALMOS [2]):

È proiettiva ogni sottoalgebra di un'algebra libera?

Si noterà allora che, relativamente a quelle eventuali algebre libere (infinite, non numerabili) per le quali la risposta al problema di HALMOS è negativa, anche la risposta al nostro problema lo è.

Concludiamo osservando che per le algebre libere finite il problema di HALMOS ha risposta ovviamente affermativa, mentre il nostro problema ha risposta negativa, salvo per l'algebra di 4 elementi

BIBLIOGRAFIA

[1] DWINGER Ph. *Introduction to Boolean Algebras*, Würzburg, 1961.

[2] HALMOS P. R., *Injective and projective Boolean Algebras*, Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. II (Lattice Theory), 1961.

[3] SIKORSKI R., *Boolean Algebras*, Berlin, 1964 (2ª edizione).

[4] STONE M. H., *The theory of representations for Boolean Algebras*, Trans. Am. math. Soc. 40, 1936.

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U. M. I.
l'11 maggio 1965.