Bollettino
Unione Matematica Italiana

Nedda Turri

Alcune osservazioni sui singrammi commutati.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.2, p. 181–184.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_181_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

Alcune osservazioni sui singrammi commutati

NEDDA TURRI (Pavia) (*)

Sunto. - *Si caratterizzano i singrammi (o grafi) commutati di alberi, di singrammi regolari, bipartiti regolari, completi.*

1. - Nella presente Nota, fatti alcuni richiami, si caratterizzano, eventualmente in più modi, i singrammi commutati di alberi, oppure i singrammi (localmente finiti) commutati di altri regolari, bipartiti regolari ed infine completi. I singrammi commutati sono già stati caratterizzati da altro Autore [5], onde ci si limiterà a dare condizioni necessarie e sufficienti affinchè un singramma *commutato* risulti di fatto il commutato di un singramma del tipo già ricordato.

2. - Nel lavoro [5] già citato è data una definizione di singramma Γ' commutato di uno Γ, la quale contempla anche il caso che Γ sia dotato di *spigoli in parallelo* (cioè di due o più spigoli con gli stessi estremi, vertici del singramma) oppure di *lacci* (ed eventualmente di *lacci in parallelo*), cioè di *spigoli ad estremi coincidenti.*

Ora, i singrammi che noi dovremo considerare sono *semplici* (cioè sprovvisti di lacci e di spigoli in parallelo) e perciò richiameremo la definizione di singramma commutato che basta per le attuali circostanze [3].

DEFINIZIONE. - Dicesi singramma commutato di un singramma *semplice* Γ un singramma (semplice) Γ' i cui vertici siano in corrispondenza biunivoca con gli spigoli di Γ ed in cui due vertici siano *adiacenti* (cioè estremi d'uno spigolo) se e solo se i corrispondenti spigoli di Γ sono *adiacenti* (cioè *incidenti* ad uno stesso vertice).

Si dimostra che, dato Γ, è dato Γ' (a meno di isomorfismi) ed anche viceversa, salvo un solo caso eccezionale [8]. Inoltre, Γ' è un singramma commutato *se e solo se gli spigoli di* Γ' *si possono ripartire in una famiglia* Θ *di singrammi completi a guisa che un*

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geometria dell'Università di Pavia, nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 20 del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Comitato per la Matematica), nell'esercizio 1964-65.

(qualunque) *vertice di* Γ' *appartenga ad al massimo due di tali singrammi completi* [5]. Risulta anzi che, se Γ ha come commutato Γ', i singrammi completi di Θ sono i commutati delle singole stelle di Γ [1].

3. - Singrammi commutati di alberi.

Albero è un singramma *connesso* (localmente finito, cioè tale che ogni vertice è incidente ad un numero *finito* di spigoli) e privo di *circuiti* subordinati. Sia Γ un albero, v un vertice di Γ e Γ_v la *stella* subordinata a Γ costituita dagli spigoli di Γ aventi per vertice v (stella di *centro* v). Passando da Γ al commutato Γ', a Γ_v corrisponde in Γ' un singramma Γ'_v completo (quale commutato di Γ_v); e, siccome Γ è sprovvisto di circuiti, i circuiti di Γ' sono contenuti in qualche Γ'_v.

Viceversa, se Γ' è commutato e se esso ammette una famiglia Θ di singrammi completi tali che ogni circuito subordinato a Γ' appartenga ad un singramma di Θ, allora Γ' *può presentarsi* quale commutato d'un albero Γ. Invero, si costruisca Γ a partire da Γ' e da Θ col criterio fissato in [5] e si osservi che ad un circuito Λ di Γ corrisponderebbe in Γ' una famiglia Θ_Λ, di $l \geq 3$ singrammi di Θ; i singrammi di Θ_Λ potendosi anzi ordinare ciclicamente in modo che due consecutivi siano sempre incidenti, essendo essi commutati delle l *stelle* di Γ aventi per *centri* i singoli vertici di Λ. D'altra parte, dal sottosingramma di Γ' costituito dagli spigoli (coi risp. vertici) appartenenti ai singrammi di Θ_Λ, si potrebbe estrarre un circuito *non contenuto* in nessuno dei singrammi di Θ.

Si conclude:

Γ' *essendo commutato, potrà di fatto presentarsi come commutato d'un albero se e solo se* Γ' *può scomporsi nei singrammi completi d'una famiglia* Θ *avente l'ulteriore proprietà che ogni circuito subordinato a* Γ' *sia subordinato ad un singramma di* Θ.

Per una diversa caratterizzazione dei singrammi commutati di alberi, conviene osservare che in un albero ogni spigolo non *terminale* (cioè tale che nessuno dei suoi vertici sia terminale) è di *rottura* [2].

[1] Veramente, ad una stella con centro in un vertice *terminale* di Γ (cioè incidente ad un solo spigolo) *non* corrisponde nessun singramma completo di Γ' o, se si vuole, corrisponde in Γ' il singramma completo dotato di un sol vertice e nessuno spigolo. Se tali singrammi completi si aggregano alla famiglia Θ, allora può dirsi che Γ' è commutato se e solo se ogni vertice di Γ' è comune a *due* singrammi completi di Θ.

[2] Uno spigolo, non terminale, d'un singramma connesso dicesi di *rottura* se la sua soppressione rompe la connessione del singramma.

Passando dall'albero Γ al suo commutato Γ' e dalla famiglia delle stelle Γ_v di Γ alla famiglia Θ di Γ', ne viene che *ciascun vertice di Γ' comune a due singrammi di Θ risulta di rottura* [3].

Tale proposizione pure s'inverte, onde essa è caratteristica per un singramma Γ' che (essendo per ipotesi commutato) si possa di fatto presentare quale commutato d'un albero.

4. - Singrammi commutati di singrammi bipartiti regolari, regolari, completi.

Se Γ è regolare tutte le stelle Γ_v contengono lo stesso numero di spigoli, onde, passando a Γ', tutti i singrammi completi Γ'_v (Γ'_v essendo il commutato di Γ_v) di Θ contengono lo stesso numero di vertici; viceversa se Γ' è commutato ed ammette una famiglia Θ di singrammi completi dello stesso *ordine* (cioè con lo stesso numero di vertici) allora Γ' può presentarsi quale commutato d'un singramma Γ *regolare.*

Ciò è immediato appena si ricordi ancora che nel passaggio da Γ a Γ' (risp. da Γ' a Γ) alle stelle Γ_v corrispondono i singrammi Γ'_v (risp. ai singrammi Γ'_v le stelle Γ_v).

Se poi Γ è bipartito regolare [4], passando a Γ' *si trova una famiglia Θ, la quale è unione di due famiglie disgiunte Θ_1, Θ_2; i singrammi completi di Θ_1 (risp. di Θ_2) hanno lo stesso ordine n_1* (risp. n_2) *e ciascun vertice di Γ' è comune a due singrammi di Θ di cui uno appartenente a Θ_1 e l'altro a Θ_2.* Basta infatti ricordare che ad un vertice di Γ' corrisponde uno spigolo di Γ i cui vertici estremi (cfr. [4]) hanno grado n_1 e risp. n_2 [5].

Anche qui si trova che le proprietà descritte per Θ sono caratteristiche per un singramma Γ' commutato di Γ bipartito regolare (in particolare, di Γ regolare (e bipartito) se $n_1 = n_2$).

Supposto infine Γ *completo, si trova Γ' regolare con una famiglia Θ di singrammi completi dello stesso ordine; e il numero dei singrammi di Θ supera di uno il loro ordine.*

Tale proprietà è caratteristica per una famiglia Θ subordinata ad un singramma Γ' commutato d'uno completo.

[3] Un vertice, non terminale, d'un singramma connesso dicesi di rottura se la soppressione del vertice e degli spigoli del singramma ad esso incidenti rompe la connessione del singramma.

[4] Dicesi bipartito un singramma Γ i cui vertici si possono attribuire a due famiglie F_1, F_2 (disgiunte) tali che ciascuno spigolo di Γ abbia un vertice in F_1 e uno in F_2; dicesi bipartito regolare se i vertici di F_1 (risp. di F_2) hanno lo stesso grado n_1 (risp. n_2). Ricordiamo anche che per *grado* d'un vertice s'intende il numero degli spigoli ad esso incidenti.

[5] Si noterà che Γ' risulta di fatto un singramma *regolare.*

5. - Singrammi con commutato regolare.

Già è stato osservato (n. 4) che un singramma Γ regolare o bipartito regolare ha come commutato un singramma Γ' regolare.

Dimostriamo che, viceversa, se Γ' è regolare, Γ risulta regolare o bipartito regolare.

Perciò si osservi che il grado d'un vertice di Γ' è uguale alla specie (6) dello spigolo corrispondente di Γ; dunque, tutti gli spigoli di Γ sono della stessa specie e ciò implica che Γ sia regolare o bipartito regolare (7), come può ritenersi variamente noto e può accertarsi in modo affatto elementare.

BIBLIOGRAFIA

[1] KÖNIG D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen,* Leipzig (Akademische Verlagsgesellschaft), 1936.

[2] BERGE C., *Théorie des graphes et ses applications,* Paris (Dunod), 1958.

[3] ORE O., *Theory of Graphs,* Amer. Math. Soc Coll. Publ., vol. XXXVII, 1962.

[4] ANDREATTA A., *Alcuni sviluppi sulla teoria relativa dei singrammi finiti,* Ann. Math. Pura Appl. (4), 65 (1964).

[5] ANDREATTA A., *Sui singrammi finiti commutati di altri,* "Rend. Ist. Lomb." 98, 1964, pp. 181-191.

[6] GHIRLANDA A.M., *Sui grafi finiti autocommutabili,* Boll. Un. Mat It. (3), 18 (1963), 281-284.

[7] MOON J.W., *On the line-graph of the complete bigraph,* Ann. Math. Statist., 34 (1963) 664-667.

[8] WHITNEY H., *Congruent graphs and the connectivity of graphs,* Amer. J. Math., 54 (1932), 150-168.

Pervenuto alla Segreteria dell' U. M. I. il 17 febbraio 1965

(7) Γ sarà precisamente regolare se esistono due vertici adiacenti dello stesso grado, bipartito regolare se due vertici adiacenti hanno grado diverso. E non si esclude che Γ possa essere sia regolare che bipartito.

(6) Specie d'uno spigolo è la somma dei gradi dei suoi vertici diminuita *di due.*