Bollettino Unione Matematica Italiana

Fulvio Arcangeli

Sulla decomposizione di una variabile casuale seguente la legge di Cauchy.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **20** (1965), n.2, p. 177–180.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1965_3_20_2_177_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1965.

Sulla decomposizione di una variabile casuale seguente la legge di Cauchy.

FULVIO ARCANGELI (Verona)

Sunto. - *Si considera la decomposizione per somma di una variabile casuale e si dimostra con un esempio che un teorema valido per una variabile seguente la legge di Gauss o seguente la legge di Poisson, non vale se la variabile casuale segue la legge di Cauchy.*

1. - È ben nota la fondamentale proprietà riguardante le leggi di GAUSS, di POISSON e di CAUCHY, che cioè, se due o più variabili casuali indipendenti, seguono una di quelle leggi, anche la loro somma obbedisce alla legge considerata.

Questa proprietà è stata invertita, relativamente alle sole leggi di GAUSS e di POISSON, rispettivamente dal CRAMÈR e dal REIKOFF (1).

Si hanno così i seguenti due importanti teoremi:

Se la somma Z di due variabili casuali X, Y, indipendenti, è una variabile gaussiana, allora lo sono pure X e Y.

Se la somma Z di due variabili casuali X, Y, indipendenti, è una variabile seguente la legge di Poisson, allora X e Y seguono anch'esse, a meno di una costante arbitraria additiva, la legge di Poisson.

In questa breve Nota desidero mostrare, attraverso un esempio, che l'indicato teorema sulla decomposizione di una variabile casuale, valido per una variabile casuale seguente la legge di GAUSS o quella di POISSON, *non vale invece per una variabile casuale seguente la legge di Cauchy.* Penso che il lavoro abbia interesse per la semplicità dell'esempio.

2. - Una variabile casuale Z segue la legge di CAUCHY se la sua densità di probabilità nel punto z è

$$h(z) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + z^2} \quad , \qquad -\infty < z < +\infty, \tag{1}$$

(1) Cfr, G. OTTAVIANI, *Su una fondamentale proprietà delle leggi di Gauss e di Poisson*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari; Anno IX N. 2, Aprile 1938, sia per la bibliografia che per una dimostrazione elementare.

dove a è un parametro positivo, esprimente la maggiore o minore dispersione della variabile casuale intorno al suo centro di simmetria, che è l'origine.

La funzione caratteristica di tale variabile casuale è, com'è noto,

$$\chi(t) = M(e^{itZ}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz} \frac{a}{a^2+z^2}\, dz = e^{-a|t|}, \tag{2}$$

ed esiste per t reale, positivo o negativo.

Le due variabili casuali indipendenti X e Y che, pur non seguendo la legge di CAUCHY, hanno per somma una variabile casuale di CAUCHY, sono caratterizzate, rispettivamente, la prima dalla densità di probabilità

$$f(x) = \frac{1}{\pi} e^{\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-u} \frac{u}{u^2+x^2}\, du, \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{3}$$

dove α è un parametro positivo, e la seconda dalla densità di probabilità

$$g(y) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\beta}{\beta^2+y^2} + \frac{\beta^2-y^2}{(\beta^2+y^2)^2}\right], \qquad -\infty < y < +\infty, \tag{4}$$

dove β è un parametro che supponiamo maggiore di uno.

La (3) e la (4) risultano effettivamente due densità di probabilità, essendo positive per qualsiasi valore di x o di y, come risulta immediatamente, ed essendo uguale ad uno il loro integrale da $-\infty$ a $+\infty$, come risulterà, come caso particolare, per $t=0$, dalle prossime formule (6) e (7).

Esse rappresentano due variabili casuali aventi una distribuzione simmetrica intorno all'origine. Per dimostrare che la somma di queste due variabili casuali segue la legge di CAUCHY, si può utilizzare direttamente la formula

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-x)\, g(x)\, dx \quad , \tag{5}$$

che permette di calcolare la densità di probabilità $h(z)$ della somma delle due variabili casuali indipendenti X e Y. Si troverebbe in tal modo, per $h(z)$, l'espressione (1), con il valore $\alpha+\beta$ del parametro a.

Invece di procedere per questa via, conviene calcolare le funzioni caratteristiche delle due variabili casuali e mostrare che il loro prodotto fornisce la funzione caratteristica (2) della variabile di CAUCHY, con $a = \alpha + \beta$.

La funzione caratteristica della variabile X è fornita, a causa della (3), dall'espressione

$$\varphi(t) = M(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dx \cdot \frac{e^{\alpha}}{\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-u} \frac{u}{u^2 + x^2} du =$$

$$= e^{\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-u} du \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{u}{u^2 + x^2} dx = e^{\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-u} e^{-u|t|} du,$$

e quindi, integrando, da

$$\varphi(t) = \frac{e^{-\alpha|t|}}{1 + |t|}. \tag{6}$$

La funzione caratteristica della variabile Y è fornita, a causa della (4), dell'espressione

$$\psi(t) = M(e^{itY}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} \left[\frac{\beta}{\beta^2 + y^2} + \frac{\beta^2 - y^2}{(\beta^2 + y^2)^2} \right] dy \; ,$$

ossia, per la (2) e tenendo presente che il secondo addendo in parentesi quadra è una funzione pari di y,

$$\psi(t) = e^{-\beta|t|} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t y \; \frac{\beta^2 - y^2}{(\beta^2 + y^2)^2} dy,$$

da cui, integrando per parti, con $\cos t y$ fattor finito, si ottiene

$$\psi(t) = e^{-\beta|t|} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} t y \; \frac{y}{\beta^2 + y^2} dy.$$

Il secondo addendo del secondo membro si sa calcolare [2] ed

[2] Per il calcolo di tale integrale si può porre nel terzo membro della (2) $z = ax$ e poi si possono derivare, rispetto al parametro a, terzo ed ultimo membro della (2); la derivazione sotto il segno è lecita data la convergenza assoluta dell'integrale.

è uguale a $|t|\, e^{-\beta|t|}$; ne segue

$$\psi(t) = e^{-\beta|t|}(1 + |t|). \tag{7}$$

Poichè la somma delle due variabili casuali X e Y, ha per funzione caratteristica la funzione

$$\chi(t) = \varphi(t) \cdot \psi(t) = e^{-(\alpha+\beta)|t|},$$

si deduce allora che essa segue la legge di CAUCHY, mentre le sue componenti X e Y non seguono tale legge, in accordo con quanto abbiamo affermato. Quindi il citato teorema di decomposizione di una variabile casuale, non vale se la variabile casuale segue la legge di CAUCHY.

Pervenuta alla Segreteria dall'U.M.I.
il 9 febbraio 1965.