
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MIRELLA PARENZAN

Su una dimostrazione del teorema di unicità nel moto dei fluidi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 19
(1964), n.2, p. 206–207.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_2_206_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Su una dimostrazione del teorema di unicità nel moto dei fluidi.

Nota di MIRELLA PARENZAN (a Bologna) (*)

Sunto. - *Si prova che il procedimento usato per dimostrare l'unicità nelle equazioni del moto dei fluidi non può essere applicato con ipotesi di convergenza all'infinito per la pressione più restrittive di quelle di Serrin.*

§ 1 - Alcune dimostrazioni proposte ⁽¹⁾ per provare il teorema di unicità per le equazioni del moto dei fluidi in un dominio illimitato — teorema nel quale non si suppone alcuna condizione di convergenza all'infinito per la velocità, ma solo per la pressione p , sulla quale si fa l'ipotesi che la differenza tra p e il suo valore p_0 all'infinito sia dell'ordine di $\frac{1}{R^\alpha}$ essendo R la distanza tra un punto fisso e il punto in cui si calcola p — si riducono a provare l'incompatibilità per $R \rightarrow +\infty$ delle soluzioni non identicamente nulle delle due disequazioni nella funzione $G(R)$.

$$(1) \quad G(R) \leq M G'(R) + c R^{1-\alpha} \sqrt{G'(R)}$$

$$(2) \quad G(R) \leq c_1 R^{3+\gamma}$$

ove M , c , c_1 sono certe costanti positive, γ un numero positivo e del resto arbitrario.

L'incompatibilità tra (1) e (2) e quindi il corrispondente teo-

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 9 marzo 1964.

(¹) D. GRAFFI: *Sul teorema di unicità nella dinamica dei fluidi*. Annali di Matematica (IV) Vol. L. pag. 379-388.

J. SERRIN: *The initial value problem for the Navier-Stokes equations*. University of Minnesota, 1962.

D. G. EDMUNDS *On the uniqueness of viscous flows*. Archive of Rational Mechanics and Analysis. XIV, pag. 173-176 (1963).

rema di unicità è stato provato da GRAFFI per $\alpha = 1$ e da SERRIN per $\alpha > \frac{1}{2}$.

Ora sarebbe interessante dal punto di vista fisico estendere il teorema in discorso al caso $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Ebbene in questa nota dimostreremo che per $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ le (1) e (2) possono ammettere soluzioni fra loro compatibili e che perciò non è possibile con il metodo degli autori citati ottenere l'accennata estensione del teorema di unicità; esso dovrà, se sussiste, stabilirsi con altro procedimento.

§ 2 - Per dimostrare che nell'ipotesi $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ esistono per $R > R_0$ soluzioni compatibili fra (1) e (2), poniamo $1 - \alpha = \frac{1}{2} + \varepsilon$ con $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ e cerchiamo di soddisfare la (1) e la (2) con la funzione

$$(3) \quad G(R) = d R^\beta$$

ove d è una costante positiva e β un numero reale positivo che ci riserviamo di precisare in seguito.

La (1) diventa

$$(4) \quad d R^\beta \leq d M \beta R^{\beta-1} + c R^{\frac{1}{2} + \varepsilon} \sqrt{d \beta R^{\beta-1}}$$

da cui

$$(5) \quad 1 \leq M \beta \frac{1}{R} + c \sqrt{\frac{\beta}{d}} R^{-\frac{\beta}{2} + \varepsilon}.$$

Ora scelto $\beta < 2\varepsilon$ si ha che per R tendente all'infinito, il secondo membro della (5) tende all'infinito e quindi per $R > R_0$ sufficientemente grande la (1) è soddisfatta dalla funzione (3). Inoltre, essendo $\beta < 2\varepsilon < 1$ la $G(R)$ data dalla (3) soddisfa certamente per $R > R_0$ la (2). La (3) dimostra dunque, come si è affermato, che le (1) e (2) per $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ sono compatibili.