
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMBERTO COLOMBO

Sui circuiti nei grafi completi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 19
(1964), n.2, p. 153–170.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_2_153_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sui circuiti nei grafi completi.

Nota di UMBERTO COLOMBO (a Roma) (*) (**)

Summary. - *The number of circuits of length 4 is given, in a complete, antisymmetric graph, of n vertices; also the maximum number of circuits of length 4 is given, that a graph of the same type may contain.*

Dato un grafo ⁽¹⁾ completo di n vertici, in particolare antisimmetrico e senza cappi, si possono considerare in esso i circuiti elementari di lunghezza $l \leq n$ e nasce il problema di determinarne il numero.

M. G. KENDALL ⁽²⁾ ha dimostrato che il numero ξ' dei circuiti di lunghezza tre è dato

$$\xi' = \frac{1}{12} n(n-1)(2n-1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (r_i)^2,$$

dove r_i è il numero di archi che escono dall' i -mo vertice. Egli ha anche determinato il numero massimo di tali circuiti in un grafo completo, antisimmetrico, senza cappi, di n vertici:

$$\text{Max } \xi' = \begin{cases} \frac{n^3 - n}{24} & \text{per } n \text{ dispari} \\ \frac{n^3 - 4n}{24} & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Queste quantità sono state ricercate da M. G. KENDALL anche

⁽⁸⁾ Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I. il 10 maggio 1963 e, con relazioni modificate, il 20 febbraio 1964.

(**) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Calcolo delle Probabilità dell'Università degli Studi di Roma, con l'appoggio del *NATO Research Grants Programme*.

⁽¹⁾ Per le definizioni sui grafi ved. C. BERGE, *Théorie des Graphes et ses Applications*, Dunod, Parigi, 1958 o la traduzione *The Theory of Graphs and its Applications*, Methuen & C., Londra, 1962.

⁽²⁾ ved M. G. KENDALL, *Rank Correlation Methods*, Griffin, Londra, 1948; *The Advanced Theory of Statistics*, vol. I, Griffin, Londra, 1952; *Further contributions to the theory of paired comparisons*, Biometrics, 11, 1955.

per fini applicativi, trovando esse utile applicazione in alcuni problemi di scelta.

Nella presente Nota si prendono in considerazione i circuiti di lunghezza quattro in un grafo completo, antisimmetrico, senza cappi, di n vertici. Nel n. I viene determinato il numero ξ dei circuiti di lunghezza quattro, dato da:

$$\xi = \frac{1}{8} (n-3) \left[n^2(n-1) - 4 \sum_{i=0}^n (r_i)^2 \right] + m,$$

dove m è intero, chiamato rango, il cui significato sarà spiegato nel testo. Nel n. II viene determinato il numero massimo di tali circuiti, dato da:

— per n dispari:

$$\text{Max } \xi = \frac{n}{48} [6(n-1)(n-3) + (n-5)(n^2 - 4n + 3)],$$

— per n pari:

$$\text{Max } \xi = \frac{n}{48} [6(n-2)(n-3) + n(n^2 - 9n + 26) - 24].$$

La dimostrazione del numero di circuiti è basata su quella adottata da M. G. KENDALL per i circuiti di lunghezza tre. Il numero ed i corrispondenti valori di $\text{Max } \xi$ sono anch'essi usati in alcuni problemi di scelta, schematizzati da un grafo del tipo sopra menzionato.

I. - Numero dei circuiti di lunghezza quattro in un grafo completo antisimmetrico senza cappi.

Sia dato un grafo (X, U) completo, antisimmetrico e senza cappi, avente n vertici, che indicheremo con $x_1, x_2, \dots, x_n$. Non essendovi cappi, non ci saranno archi $(x_i, x_i) \in U$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Essendo il grafo completo, ogni coppia x_i, x_j di vertici sarà collegata da almeno un arco, cioè

$$(x_i, x_j) \notin U \Rightarrow (x_j, x_i) \in U \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j);$$

essendo poi antisimmetrico, ogni coppia x_i, x_j di vertici sarà collegata da uno ed un solo arco, cioè

$$(x_i, x_j) \in U \Rightarrow (x_j, x_i) \notin U \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j).$$

Il numero totale degli archi è $\frac{n(n-1)}{2}$, poichè per ogni coppia di vertici esiste uno ed un solo arco e non esistono per ipotesi cappi.

Lo schema del grafo (considerando gli spigoli e supponendo $n = 5$) è:

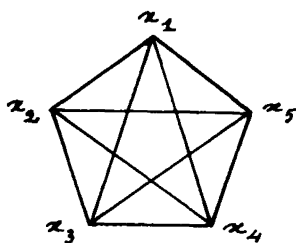


Fig. 1

Al grafo (X, U) composto quindi da n vertici ed $\frac{n(n-1)}{2}$ archi associeremo una matrice quadrata A di ordine n , il cui elemento generico a^i_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) è relativo alla i -ma riga ed alla j -ma colonna. Porremo:

$$a^i_j = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{se } (x_i, x_j) \notin U; \end{cases}$$

in particolare $a^i_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

La matrice $A = (a^i_j)$ è detta matrice associata al grafo ed in base ad essa determineremo il numero dei circuiti di lunghezza quattro presenti nel grafo (X, U) ; essa ha $\frac{n(n+1)}{2}$ elementi zero ed $\frac{n(n-1)}{2}$ elementi unità, in tal numero essendo gli archi che collegano gli n vertici. La somma degli elementi della i -ma riga della matrice A è quindi uguale al numero degli archi che escono dal vertice x_i ($i = 1, 2, \dots, n$); tale somma è denotata con

$$r_i = a^i_1 + a^i_2 + \dots + a^i_n \quad (i = 1; 2, \dots, n).$$

Indichiamo inoltre con m il numero delle matrici quadrate di ordine due, ottenute dalla matrice A sopprimendo $n-2$ righe ed $n-2$ colonne, che siano del tipo

$$(1,1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

composte cioè da quattro elementi unità. Tale numero verrà denominato *rango* di A ⁽³⁾; esso è legato al numero dei circuiti di lunghezza quattro presenti nel grafo e di esso si dovrà tenere conto nella determinazione dei circuiti stessi.

Ciò posto si ha il seguente

TEOREMA. - *Dato un grafo (X, U) completo, antisimmetrico, senza cappi, di $n \geq 4$ vertici, il numero ξ dei circuiti di lunghezza quattro è*

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \xi &= 3 \binom{n}{4} - n(n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} + m = \\ &= \frac{n-3}{8} \left[n^2(n-1) - 4 \sum_{i=1}^n r_i^2 \right] + m. \end{aligned}$$

La dimostrazione sarà fatta in due momenti successivi e segue quella adottata da M. G. KENDALL per la determinazione dei circuiti di lunghezza tre. Nel seguito della dimostrazione parleremo indifferentemente di lunghezza dei circuiti e dei cicli e dovremo collegare (in seguito ad una particolare corrispondenza) agli spigoli dei cicli di una data lunghezza la nozione di orientamento, carattere proprio dei circuiti; ciò viene fatto essenzialmente per scopi e di enumerazione.

Un circuito di lunghezza quattro che collega ad es. i vertici x_i, x_j, x_h, x_k è rappresentato graficamente da

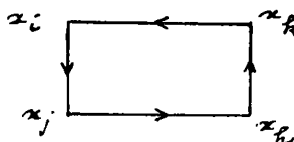


Fig 2

(3) Evidentemente il nome rango non ha l'usuale significato.

Allo stesso circuito si può evidentemente associare un ciclo il quale, benchè prescindendo dall'orientamento del percorso sugli spigoli, è da considerarsi unico; anch'esso è allora di lunghezza quattro. Potremo così, dato un circuito di lunghezza quattro, associare ad esso un ciclo di lunghezza quattro, ma non potremo, in generale, fare viceversa. Infatti al ciclo (u_1, u_2, u_3, u_4) , collegante i vertici x_i, x_j, x_h, x_k

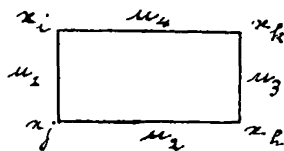


Fig. 3

può o meno corrispondere un circuito che collega gli stessi vertici, poichè l'orientamento sui quattro archi può essere tale da non determinare un circuito. Esiste allora una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei circuiti ed un sottoinsieme dei cicli ⁽⁴⁾; in base ad essa in generale potremo dire quindi che un circuito è sempre un ciclo, mentre un ciclo non è sempre un circuito.

Evidentemente, per poter collegare ad ogni ciclo un circuito, dovremo ricorrere alla nozione di orientamento degli spigoli del ciclo; associeremo cioè ad ogni ciclo un circuito se e solo se l'orientamento degli archi (corrispondenti agli spigoli stessi) è tale da che si può ritornare ad un medesimo vertice da cui siamo partiti.

Nel seguito quindi parleremo di « *ciclo non circuito* », intendendo un ciclo che, considerato col particolare orientamento degli archi collegati agli spigoli, non ha associato, nella corrispondenza sopra definita, un circuito. Accanto alla nozione di ciclo non circuito introdurremo perciò la nozione di « *ciclo circuito* » ed evidentemente, potendo essere un ciclo o ciclo circuito oppure ciclo non circuito, il numero dei cicli circuiti (che a noi interessano) potrà essere determinato conoscendo il numero dei cicli e dei cicli non circuiti.

I.1. - Un ciclo di lunghezza quattro, composto da quattro spigoli, unisce tra loro quattro distinti vertici x_i, x_j, x_h, x_k ; poichè

⁽⁴⁾ Una corrispondenza completa e biunivoca è quella stabilita tra le quaterne di archi che collegano quattro vertici ed i cicli.

il grafo è composto da n vertici ed è completo antisimmetrico, senza cappi, i gruppi distinti di quattro vertici sono in numero pari ad $\binom{n}{4}$. La scelta di una quaterna di vertici non determina però un solo ciclo, ma tre diversi cicli di lunghezza quattro, schematizzati nei tipi a), b) e c):

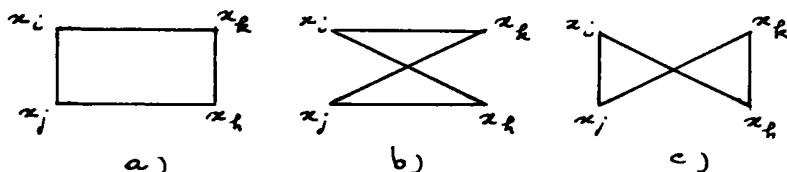


Fig. 4

Ne risulta che il numero totale dei cicli distinti di lunghezza quattro in (X, U) è:

$$(I.3) \quad 3 \binom{n}{4},$$

essendovi tre cicli distinti per ogni quaterna distinta di vertici, scelta tra le $\binom{n}{4}$ possibili.

I.2. - Determiniamo il numero totale dei cicli non circuiti di lunghezza quattro.

Scelta una quaterna di vertici x_i, x_j, x_h, x_k , consideriamo ⁽⁵⁾ i diversi tipi di quaterne di archi alle quali è associato un ciclo e che non costituiscono un circuito; ai fini della trattazione consideriamo i cicli del tipo a), essendo i cicli a), b), c) equivalenti come struttura.

Supposto di avere scelto la quaterna di vertici x_i, x_j, x_h, x_k e la corrispondente quaterna di spigoli u_1, u_2, u_3, u_4 , al ciclo del tipo a) che collega nell'ordine i vertici x_i, x_j, x_h, x_k non sarà associato un circuito se e solo se almeno da un vertice escono due archi orientati verso altri due vertici della quaterna (al mas-

⁽⁵⁾ Evidentemente, sebbene ad ogni ciclo non sia possibile associare sempre un circuito, è sempre possibile associare una quaterna di archi; consideriamo cioè la corrispondenza definita nella nota precedente.

simo ci potranno essere due vertici da ognuno dei quali escono due archi). Si avranno i tre tipi di cicli non circuiti:

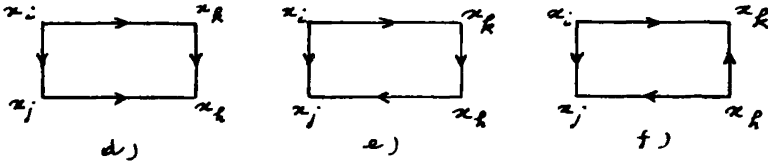


Fig. 5

I cicli non circuiti dei tipi *d)* ed *e)* sono equivalenti, in quanto c'è un solo vertice avente due archi orientati verso altri due vertici; invece i cicli del tipo *f)* sono particolari, essendo collegati alla particolare struttura della matrice A e precisamente al rango m definito all'inizio.

Infatti il grafo (X, U) contiene quaterne di archi del tipo *f)* se e solo se la matrice $A = (a_{ij})$ contiene matrici quadrate del tipo:

$$(I.1.) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se il grafo contiene una quaterna di archi del tipo *f)*:

$$(x_i, x_j) \in U, \quad (x_i, x_k) \in U,$$

$$(x_h, x_j) \in U, \quad (x_h, x_k) \in U,$$

ovvero nella matrice A :

$$a_{ij}^i = a_{ik}^i = a_{jh}^h = a_{kh}^h = 1,$$

cioè si potrà trovare in essa una matrice quadrata di ordine due del tipo (I.1) (nel caso particolare la matrice ottenuta considerando gli elementi comuni alle righe i -ma ed h -ma ed alle colonne j -ma ed k -ma). Inversamente se la matrice A contiene una matrice del tipo (I.1), allora nello schema del grafo esisterà una quaterna di archi del tipo *f)*.

A seconda quindi che il rango m sia uguale a zero o maggiore di zero, il numero dei circuiti varia; trattiamo quindi i due casi separatamente.

Supponiamo che la matrice A abbia rango zero, ovvero esistano cicli non circuiti dei tipi $d)$ ed $e)$; consideriamo un vertice generico x_i e supponiamo che da esso escano due archi, l'uno verso il vertice x_j e l'altro verso il vertice x_k . Evidentemente i cicli collegati alle quaterne di archi alle quali appartengono (x_i, x_j) e (x_i, x_k) sono cicli non circuiti, ma tali cicli (quaterne) sono $n-3$, in quanto, esclusi i vertici x_i, x_j, x_k , rimangono $n-3$ vertici i quali si possono collegare con i vertici x_j ed x_k e formare con essi un ciclo non circuito di lunghezza quattro. Ogni coppia di archi uscenti da un vertice generico del grafo dà origine dunque a $n-3$ cicli non circuiti. Essendo le coppie diverse di archi uscenti dal vertice x_i in numero di $\binom{r_i}{2}$ ⁽⁶⁾, il numero totale dei cicli non circuiti di lunghezza quattro, nel grafo (X, U) , è dato da:

$$(I.4.) \quad (n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2}.$$

Così procedendo, siamo sicuri di considerare tutti e solo i cicli non circuiti presenti nel grafo (X, U) , avendo supposto il grafo completo antisimmetrico senza cappi ed avendo supposto $m = 0$.

Supponiamo ora che sia $m > 0$, ovvero ci siano cicli non circuiti dei tipi $d)$, $e)$ ed $f)$ (di quest'ultimo esattamente m). Riprendiamo una quaterna di archi del tipo $f)$; enumerando i cicli non circuiti nel vertice x_i , il ciclo che collega x_i, x_j, x_k, x_k non viene considerato circuito, ma il ciclo stesso non viene considerato circuito una seconda volta, quando enumeriamo i cicli non circuiti nel vertice x_k . Poichè però il numero di queste quaterne è m , se al numero dato (I.4.) sottraiamo il numero m , otteniamo tutti e solo i cicli non circuiti di lunghezza quattro. Esso è dato da:

$$(I.5.) \quad (n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} - m.$$

I.3. - Determinato nel grafo (X, U) il numero totale dei cicli e dei cicli non circuiti, il numero totale dei circuiti (cicli circuiti) è ottenuto per differenza, dalla (I.3.) e dalla (I.5.).

(6) Evidentemente, se $r_i < 2$ si ha $\binom{r_i}{2} = 0$.

Si ottiene perciò :

$$\begin{aligned}
 \xi &= 3 \binom{n}{4} - (n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} + m = \\
 \text{(I.2)} \quad &= \frac{n-3}{8} [n'(n-1) - 4 \sum_{i=1}^n r_i^2] + m.
 \end{aligned}$$

Poichè $m \geq 0$, si ha sempre

$$\text{(I.6.)} \quad \xi \geq \frac{n-3}{8} [n'(n-1) - 4 \sum_{i=1}^n r_i^2],$$

qualunque sia la struttura della matrice A ⁽⁷⁾.

II. - Numero massimo dei circuiti di lunghezza quattro in un grafo completo antisimmetrico senza cappi.

Determinato il numero ξ dei circuiti di lunghezza quattro in un grafo completo, antisimmetrico, senza cappi, di n vertici, può essere interessante determinare il numero massimo di tali circuiti, per n prefissato.

Vale il seguente

TEOREMA. - *Dato un grafo (X, U) completo, antisimmetrico, senza cappi, di $n \geq 4$ vertici e detto $\text{Max } \xi$ il numero massimo di circuiti di lunghezza quattro che tale grafo può contenere, si ha :*

— per n dispari :

$$\begin{aligned}
 \text{(II.1.)} \quad \text{Max } \xi &= \frac{n}{48} [6(n-1)(n-3) + (n-5)(n^2 - 4n + 3)] = \\
 &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-3)}{48}.
 \end{aligned}$$

(7) Il Prof. A. TERRACINI, in una Sua lettera gentilmente inviata, mi faceva notare, a nome del Revisore di una primitiva Redazione di questa Nota, che il numero ξ dei circuiti di lunghezza quattro è dato da $\xi = \frac{m^*}{2}$, dove m^* è il numero delle matrici di ordine due, di una delle due forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, contenute in A , ma non contenenti elementi della sua diagonale principale.

— per n pari :

$$(II.2.) \quad \text{Max } \xi = \frac{n}{48} [6(n-2)(n-3) + n(n^2 - 9n + 26) - 24] = \\ = \frac{(n+2)n(n-2)(n-3)}{48}.$$

Dato un grafo (X, U) , di n vertici, il numero dei circuiti di lunghezza quattro che esso contiene dipende, fissato n , dalla matrice A ad esso associata, poichè la quantità

$$(n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} \quad \text{ed} \quad m$$

assumono particolari valori a seconda del particolare tipo di A .

Data una matrice A avente una certa struttura, relativamente alle quantità r_i , il rango m di questa matrice non è determinato dalle r_i , ma può variare, in quanto disponendo variamente gli elementi unità sulle righe si possono ottenere differenti valori. Inversamente, data una certa matrice di rango m , la struttura di questa matrice può variare, nel senso che le n quantità r_i possono assumere differenti valori.

Ne segue che il numero dei circuiti

$$(I.2.) \quad \xi = 3 \binom{n}{4} - (n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} + m$$

dipende non solo dai valori r_i , ma anche dalla particolare disposizione degli elementi unità, per cui m può variare, a parità dei valori $r_1, r_2, \dots, r_n$ e quindi a parità del valore $\sum_{i=2}^n \binom{r_i}{2}$.

Dalla (I.2.) si deduce, fissato $n \geq 4$,

$$(II.3.) \quad \text{Max } \xi = 3 \binom{n}{4} - \text{Min} \left\{ (n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} - \max_{\{r_i\}} m \right\},$$

dove $\max_{\{r_i\}} m$ è il valore massimo che il rango m può assumere relativamente ad una distribuzione di archi, cioè ad una n -pla di valori r_i fissata.

Per determinare il minimo della quantità $(n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2}$ — $\max_{\{r_i\}} m$ si esprimerà dapprima il valore $\max_{\{r_i\}} m$ in funzione delle m quantità r_i e si minimizzerà poi la quantità $(n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} - \max_{\{r_i\}} m$, funzione delle quantità r_i .

Il massimo assoluto del rango m , nei grafi di n vertici, completi, antisimmetrici e senza cappi, è dato da

$$(II.4.) \quad \text{Max } m = \binom{n}{4} = \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=1}^{n-i-2} \binom{n-i-j}{2};$$

tale massimo viene raggiunto nella matrice in cui gli elementi a^i_j soddisfano alle condizioni:

$$a^i_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i < j \\ 0 & \text{se } i \geq j \end{cases}$$

cioè nella matrice M del tipo:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti, assegnata una quaterna di vertici, ad essa corrisponde al massimo ad una ed una sola matrice (I.1.) e le quaterne distinte di vertici sono $\binom{n}{4}$; scelti comunque quattro vertici x_i, x_j, x_h, x_k con $i < j < h < k$, si ha sempre, per le posizioni fatte sugli elementi di M , $a^i_h = a^i_k = a^j_h = a^j_k = 1$. È notevole il fatto che ogni altra matrice di rango massimo è riconducibile alla M con un opportuno ordinamento dei vertici del grafo.

Siano infatti, per ogni quaterna generica x_i, x_j, x_h, x_k , $a^i_h = a^i_k = a^j_h = a^j_k = 1$; ciò significa che per un vertice x_{i_1} è $a^j_{i_1} = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n; j \neq i_1$), per un vertice x_{i_2} è $a^j_{i_2} = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$;

$j \neq i_1; j \neq i_2, \dots$, per una vertice $x_{i_{n-1}}$ è $a_{i_n}^{i_{n-1}} = 1$. Supponiamo infatti che, nell'ipotesi posta, ci siano almeno due valori r_i ed r_j uguali; supponiamo che sia $(x_i, x_j) \in U$ e di conseguenza per un vertice x_h sia $(x_j, x_h) \in U$ ed $(x_i, x_h) \notin U$; per tutte le quaterne di vertici x_i, x_j, x_h, x_k non è possibile determinare una matrice del tipo (I.1). Se una matrice è quindi di rango massimo, si ha $r_{i_1} = n-1, r_{i_2} = n-2, \dots, r_{i_{n-1}} = 1, r_{i_n} = 0$; posto allora $x_{i_1} = x'_1, x_{i_2} = x'_2, \dots, x_{i_n} = x'_n$ si otterrà un grafo (X', U') al quale corrisponde una matrice $M' = M$.

La matrice M non solo determina il valore $\text{Max } m$, ma può essere considerata come una matrice generatrice delle generiche matrici A corrispondenti ad un qualunque grafo, perchè ogni matrice $A \neq M$ si può riportare alla matrice M (scambiando eventualmente i valori a_i^j ed a_j^i , se $a_i^j = 0$, quando $i < j$, scambiando cioè l'orientamento di qualche arco nello schema del grafo), ovvero ogni matrice $A \neq M$ si può ottenere con un numero finito di scambi tra gli elementi a_i^j ed a_j^i della matrice M stessa.

II.1. - Determiniamo ora il vincolo al quale deve soddisfare il rango m di una qualunque matrice A associata al grafo; precisamente dimostriamo che, assegnati n valori r_i , tali che $\sum_{i=1}^n r_i = \frac{n(n-1)}{2}$, si ha:

$$(II.5.) \quad \max_{\{r_i\}} m \leq \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{3} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i-2} \binom{r_i-j}{3}^{(8)}.$$

Supponiamo infatti che alla quaterna di vertici x_i, x_j, x_h, x_k corrisponda una matrice (I.1), supponiamo ad es. che da x_i ed x_j escano due archi diretti verso x_h ed x_k . Nello schema del grafo ciò sarà espresso c. s.:

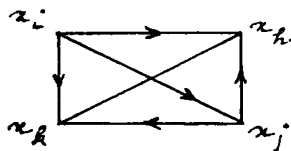


Fig. 6

(8) I coefficienti binomiali $\binom{r_i}{3}$, per cui $r_i < 3$ ed $\binom{r_i-j}{2}$ per cui $r_i - j < 2$ devono considerarsi nulli; ciò sarà sottinteso in seguito, quando compaiono delle sommatorie.

e poichè $(x_i, x_j) \in U$ oppure $(x_j, x_i) \in U$, da uno dei due vertici x ed x_j dovranno uscire tre archi; supponiamo ad es. che escano da x_i . Da ciò segue che una qualunque terna degli r_i archi uscenti dal vertice x_i può dar luogo al massimo ad una matrice del tipo (I.1).

Se almeno uno dei due elementi a_{ij}^j, a_k^j è uguale a zero, tale matrice non esiste. Se inoltre non solo risulta $a_h^i = a_k^i = a_h^j = a_k^j = 1$ ed $a_j^i = 1$, ma è anche $a_h^i = a_k^i = 1$ ($l \neq i, j, h, k$), se cioè gli elementi $a_h^i, a_k^i, a_h^j, a_k^j$ costituiscono una matrice del tipo (I.1.), deve essere $(x_i, x_l) \in U$ oppure $(x_l, x_i) \in U$; nel primo caso la terna di archi uscenti da x_i è $(x_i, x_h), (x_i, x_k), (x_i, x_l)$, diversa dalla terna precedentemente considerata per la coppia di vertici x_i ed x_j ; nel secondo caso la terna di archi è relativa al vertice x_l .

Le considerazioni svolte per il vertice x_i possono essere estese ad ognuno degli n vertici; poichè d'altra parte risulta

$$(II.6) \quad \binom{r_i}{3} = \sum_{j=1}^{r_i-2} \binom{r_i-j}{2},$$

sommando le quantità espresse dalla (II.6.) per $i = 1, 2, \dots, n$, ne risulta la (II.5.); alla diseuguaglianza espressa dalla (II.5.) soddisfa il rango della matrice M , in quanto per essa risulta $r_i = n - i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Possiamo perciò porre, per una qualunque n -pla di valori r_i :

$$(II.7) \quad \max_{\{r_i\}} m \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i-2} \binom{r_i-j}{2} = m(r_1, \dots, r_n),$$

II.2. - Calcolata una maggiorazione del rango m per una qualunque matrice A , determiniamo la n -pla di valori r_i per la quale sia minima la quantità

$$(n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} - \max_{\{r_i\}} m;$$

essendo sempre $\max_{\{r_i\}} m \leq m(r_1, \dots, r_n)$, minimizziamo dapprima la quantità

$$(II.8) \quad S(r_1, \dots, r_n) = (n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} - m(r_1, \dots, r_n),$$

funzione delle n quantità r_i .

Siccome

$$S(r_1, \dots, r_n) \leq (n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} - \max_{\{r_i\}} m$$

sarà

$$\text{Min } S(r_1, \dots, r_n) \leq \text{Min} \left\{ (n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} - \max_{\{r_i\}} m \right\};$$

d'altra parte, dimostremo che per i valori r_i per i quali $S(r_1, \dots, r_n)$ è minima si ha

$$\max_{\{r_i\}} m = m(r_1, \dots, r_n)$$

e quindi il $\text{Min} \left\{ (n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} - \max_{\{r_i\}} m \right\}$ è raggiunto per i valori di r_i che minimizzano $S(r_1, \dots, r_n)$ ed inoltre è:

$$(II.9.) \quad \text{Min } S(r_1, \dots, r_n) = \text{Min} \left\{ (n-3) \sum_{i=1}^n \binom{r_i}{2} - \max_{\{r_i\}} m \right\}.$$

Determiniamo dapprima i valori r_i che corrispondono alla equiripartizione degli archi. Per n dispari si ha:

$$r_i = \frac{n-1}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

per n pari si ha

$$r_i = \begin{cases} \frac{n}{2} & (i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}) \\ \frac{n}{2} - 1 & (i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n) \end{cases} \quad (9).$$

Consideriamo fissata una n -pla di valori r_i (e quindi la quantità $S(r_1, \dots, r_n)$); supponiamo che sia

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$$

(ciò è sempre possibile operando degli scambi sui vertici, nello schema del grafo) e supponiamo che per due valori generici r_h ed r_k sia $r_h > r_k$, $r_h = r_k + i$ ($i \geq 1$) ed $a_k^h = 1$. Passando dai valori

(9) Ved. M. G. KENDALL, op. cit.; per n pari non si ha una equiripartizione in senso stretto, in quanto $\frac{n-1}{2}$ non è intero, ma essa si può considerare come la meno variabile.

r_i ai valori r'_i così definiti:

$$\begin{aligned} r'_h &= r_h - 1 \\ r'_k &= r_k + 1 \\ r'_i &= r_i \quad (i \neq h, k) \end{aligned}$$

scambiando gli elementi a_k^h ed a_h^k ed indicando con $S(r'_1, \dots, r'_n)$ la quantità espressa dalla (II.8.), definita in corrispondenza alla nuova n -pla di valori r'_i ,

— se $r_h \leq n - 1$ ed $i = 1$ si ha

$$S(r'_1, \dots, r'_n) = S(r_1, \dots, r_n),$$

— se $r_h \leq n - 1$ ed $i \geq 2$ si ha

$$S(r_1, \dots, r_n) - S(r'_1, \dots, r'_n) \geq (i - 1)(n - r_h) - 1 \geq 0$$

(la differenza è sempre positiva, eccetto che per $r_h = n - 1$ ed $i = 2$).

Ciò significa che, per n dispari o pari, la quantità $S(r_1, \dots, r_n)$ raggiunge il suo minimo valore per l'equiripartizione degli archi.

Per n dispari infatti si può supporre la derivazione della matrice corrispondente alla equiripartizione, partendo dalla matrice M e scambiando gli elementi $a_k^h = 1$ ed $a_h^k = 0$, con $k > h + \frac{n-1}{2}$ ($h = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$); per n pari si può ugualmente supporre la derivazione dalla matrice M , scambiando gli elementi $a_k^h = 1$ ed $a_h^k = 0$, con $k > h + \frac{n}{2}$ ($h = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$); in entrambi i casi è $r_h \geq r_k + 2$.

Passando d'altra parte, con uno o più scambi degli elementi a_i^j ed a_j^i ($i, j = 1, 2, \dots, n$), dalla equiripartizione degli archi ad una qualunque altra ripartizione, la quantità $S(r_1, \dots, r_n)$ aumenta, oppure rimane immutata.

II.3. — Dimostriamo ora che per l'equiripartizione degli archi, individuata dai particolari valori r_i già determinati, sia per n dispari che per n pari si ha $\max m = m(r_1, \dots, r_n)$; dimostriamo cioè che per essa si ha: $\{r_i\}$

— per n dispari

$$(II.10.) \quad m = n \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2} - j}{2} = m \left(\frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2} \right);$$

— per n pari

$$(II.11.) \quad m = \frac{n}{2} \binom{\frac{n}{2} - 1}{2} + n \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-2} \binom{\frac{n}{2} - j}{2} = m\left(\frac{n}{2} - 1, \dots, \frac{n}{2}\right).$$

Poichè, per ogni n -pla di valori r_i è valida la (II.5), supponiamo di distribuire gli elementi unità nella matrice A' corrispondente alla equiripartizione, in modo che le righe i -ma ed $(i+1)$ -ma ($i = 1, 2, \dots, n-1$) abbiano $r_i - 1$ elementi unità corrispondenti (unità che cioè siano disposte sulle stesse colonne); sia ad es. A' (per $n = 5, 6$) così configurata:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per l'enumerazione delle matrici del tipo (I.1.), poichè si devono confrontare tutte le righe a due a due, per n dispari possiamo costruire una matrice A'' di $n + \frac{n-1}{2} - 2$ righe ed n colonne, avente come prime $\frac{n-1}{2} - 2$ righe le ultime $\frac{n-1}{2} - 2$ di A' e le rimanenti n righe uguali a quelle di A' (per $n = 5$, $A'' = A'$). Confrontando la prima riga di A'' con le successive $\frac{n-1}{2} - 2$ righe di A'' , la seconda con le successive $\frac{n-1}{2} - 2, \dots$, l' n -ma riga di A'' con le rimanenti $\frac{n-1}{2} - 2$, siamo sicuri di confrontare a due a due tutte le righe della matrice A' originaria, mediante n gruppi di confronti. Ma, confrontando la prima e la seconda riga di un generico gruppo di confronti, si ottengono, per la particolare disposizione delle unità $\binom{\frac{n-1}{2} - 1}{2}$ matrici (I.1.); confrontando la prima e la terza se ne ottengono $\binom{\frac{n-1}{2} - 2}{2}$; con-

frontando la prima e la $\binom{\frac{n-1}{2}-2}{2}$ -ma se ne ottengono $\binom{2}{2}$. In totale, per gli n gruppi, si ottiene:

$$(II.10.) \quad m = n \left[\binom{\frac{n-1}{2}-1}{2} + \dots + \binom{2}{2} \right] = n \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}-2} \binom{\frac{n-1}{2}-j}{2}.$$

Anche per n pari ci si potrà sempre riferire, per i confronti a due a due delle righe di A' , ad una matrice A'' di $n + \frac{n}{2} - 3$ righe e di n colonne, avente come prime $\frac{n}{2} - 3$ righe le ultime $\frac{n}{2} - 3$ righe di A' e come ultime n righe le righe di A' (per $n=6$, $A'' = A'$). Si ottengono anche qui n gruppi di confronti di cui però $\frac{n}{2}$ distinti dai rimanenti. Infatti, per i primi, si ottengono complessivamente

$$\frac{n}{2} \left[\binom{\frac{n}{2}-2}{2} + \dots + \binom{2}{2} \right]$$

matrici (I.1.), mentre per i rimanenti $\frac{n}{2}$ si ottengono complessivamente

$$\frac{n}{2} \left[\binom{\frac{n}{2}-1}{2} + \dots + \binom{2}{2} \right]$$

matrici (I.1.); ne risulta:

$$(II.11.) \quad m = \frac{n}{2} \binom{\frac{n}{2}-1}{2} + n \left[\binom{\frac{n}{2}-2}{2} + \dots + \binom{2}{2} \right] = \\ = \frac{n}{2} \binom{\frac{n}{2}-1}{2} + n \sum_{j=2}^{\frac{n}{2}-2} \binom{\frac{n}{2}-j}{2}.$$

La formula (II.9.) è così verificata e risulta :

— per n dispari

$$(II.12.) \quad \text{Min } S(r_2, \dots, r_n) = (n-3) \frac{n^3 - 4n^2 + 3n}{9} + \\ - n \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}-2} \binom{\frac{n-1}{2}-j}{2}$$

— per n pari

$$(II.13.) \quad \text{Min } S(r_1, \dots, r_n) = (n-3) \frac{n^3 - 4n^2 + 4n}{8} + \\ - \frac{n}{2} \binom{\frac{n}{2}-1}{2} - n \sum_{j=2}^{\frac{n}{2}-2} \binom{\frac{n}{2}-j}{2}.$$

Sostituendo, nella formula (II.3.) le quantità $\text{Min } S(r_1, \dots, r_n)$, date dalle (II.12.) e (II.13.), si ottiene:

per n dispari :

$$(II.1.) \quad \text{Max } \xi = \frac{n-3}{8} (n^2 - n) + \frac{n}{8} \sum_{i=1}^{\frac{n-5}{2}} (n-2i-1)(n-2i-3) = \\ = \frac{n}{48} [6(n-1)(n-3) + (n-5)(n^2 - 4n + 3)] = \\ = \frac{(n+1)n(n-1)(n-3)}{48},$$

— per n pari :

$$II.2.) \quad \text{Max } \xi = \frac{n-3}{8} (n^2 - 2n) + \frac{n}{16} (n-2)(n-4) + \\ + \frac{n}{8} \sum_{j=2}^{\frac{n-4}{2}} (n-2i)(n-2i-2) = \\ = \frac{n}{48} [6(n-2)(n-3) + n(n^2 - n + 26) - 24] = \\ = \frac{(n+2)n(n-2)(n-3)}{48}.$$