
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DOMINGOS PISANELLI

Sui funzionali trascendenti interi dello spazio LN^* .

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 19
(1964), n.2, p. 106–109.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1964_3_19_2_106_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sui funzionali trascendenti interi dello spazio LN^* (*)

Nota di DOMINGOS PISANELLI (a S. Paolo - Brasile) (**)

Sunto. - Si caratterizzano i funzionali trascendenti interi degli spazi LN^* e $[F]$.

Nella nostra tesi di libera-docenza [1] abbiamo caratterizzato gli operatori analitici (secondo FANTAPPIÈ) in un intorno dello zero dello spazio LN^* , riunione di spazi di BANACH $(X_m)_{m \geq 1}$, introdotto da J. SEBASTIAO e SILVA ([2], p. 388; [3]).

Vogliamo ora caratterizzare i funzionali trascendenti interi di LN^* , cioè gli operatori analitici in tutto lo spazio LN^* e con valori nel piano complesso C . Come esempio consideriamo i funzionali trascendenti interi definiti nello spazio $[F]$ di FANTAPPIÈ.

Osserviamo che se $f(h)$ è analitico in un intorno aperto e stellato $V(0)$ di zero di LN^* , con valori in C , si ha lo sviluppo di TAYLOR, valido per ogni $h \in V(0)$:

$$(1) \quad f(h) = f(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \delta^n f(0, h)$$

dove $\delta^n f(0, h) = \delta^n f(0, h, \dots, h)$ ($n \geq 1$) è un funzionale polinomiale omogeneo di grado n , continuo in LN^* e

$$\delta^n f(0, h_1, \dots, h_n) = \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \dots \partial \varepsilon_n} f(\varepsilon_1 h_1 + \dots + \varepsilon_n h_n) \right\}_{\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 0}$$

è un funzionale n -lineare continuo di $(LN)^n$ ([1], p. 14, p. 29).

Sia $\mathfrak{S}$ il campo di convergenza del secondo membro di (1). Converremo di chiamare ancora $f(h)$ il funzionale analitico definito in $\mathfrak{S}$ ([1], p. 32).

Sia $\|h\|_m$ la norma in X_m ($m \geq 1$).

Si ha allora il seguente

TEOREMA. - Una condizione necessaria e sufficiente affinché il funzionale analitico $f(h)$ sia trascendente intero è che esista una

(*) Per le notazioni e definizioni rinviamo il lettore a [1].

(**) Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 7 ottobre 1963.

successione di numeri reali positivi $a_{nm} (n \geq 0, m \geq 1)$ per cui:

$$(2) \quad \left| \frac{1}{n!} \delta^n f(0, h) \right| \leq a_{nm} (\|h\|_m)^n \quad n \geq 0, \quad m \geq 1$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_{nm}} = 0 \quad m \geq 1.$$

Infatti la disuguaglianza fondamentale ([1], p. 29) darà:

$$(3) \quad |\delta^n f(0, h_1, \dots, h_n)| \leq n^n M_{r,m} \quad h_1, \dots, h_n \in B_{r,m}; \quad n \geq 0; \quad m \geq 1$$

dove $B_{r,m}$ è la sfera chiusa di centro zero e raggio $r > 0$ di X_m e $M_{r,m}$ è una maggiorazione di $|f(h)|$ in $B_{r,m}$ ⁽¹⁾. Da questa si avrà:

$$|\delta^n f(0, h)| \leq n^n M_{r,m} \left(\frac{\|h\|_m}{r} \right)^n \quad h \in B_{r,m}$$

e

$$\sqrt[n]{a_{nm}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!} \sup_{B_m} |\delta^n f(0, h)|} \leq \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!} \frac{M_{r,m}^{\frac{1}{n}}}{r}}$$

dove B_m è la sfera chiusa di centro zero e raggio uno di X_m .

Si avrà allora:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_{nm}} \leq e \frac{1}{r}$$

Facendo $r \rightarrow \infty$ si avrà $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_{nm}} = 0$ ($m \geq 1$), dunque $|\delta^n f(0, h)| \leq a_{nm}$ quando $h \in B_m$ e $m \geq 1$ e con ciò la (2) è dimostrata.

Viceversa se la (2) è verificata, è immediato che la serie (1) converge per ogni $h \in LN^*$ e perciò il funzionale analitico $f(h)$ è trascendente intero.

ESEMPIO. - Sia $[F]$ lo spazio di FANTAPPIÈ riunione degli spazi di BANACH $[F_m]$ ($m \geq 1$) e $f(h)$ un funzionale analitico in un intorno dello zero di $[F]$ ([1], p. 37).

(¹) L'esistenza di questa maggiorazione segue dalla continuità di f e dalla compattezza di $\bar{B}_{r,m}$ in LN^* ([2], p. 400).

I funzionali derivati $\delta^n f(0, h_1, \dots, h_n)$ hanno la forma

$$\delta^n f(0, h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) h_1(\alpha_1) \dots h_n(\alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

$$h_1, \dots, h_n \in [F_m]$$

dove

$$(4) \quad u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \delta^n f\left(0, \frac{1}{\alpha_1 - t}, \dots, \frac{1}{\alpha_n - t}\right)$$

è olomorfa in $(CF)^n$, nulla nei punti all' ∞ e Γ è la frontiera di F_m convenientemente orientata ($m \geq 1$).

Sia $\alpha_j \in \overline{CF_m}$ ($1 \leq j \leq n$) e $t \in F_{m+1}$. Si avrà

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha_j - t} \in [F_{m+1}].$$

Sia ρ_m la distanza fra $\overline{CF_m}$ e F_{m+1} . Da (5) si avrà

$$\frac{\rho_m^n}{\alpha_j - t} \in B_{r_{m+1}}.$$

Da (3) e da (4)

$$\frac{1}{n!} |u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \leq n^n \frac{M_{r_{m+1}}}{(\rho_m^n)^n} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{CF_m}.$$

Ragionando come prima verrà:

$$(6) \quad \frac{1}{n!} |u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \leq b_{n,m} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{CF_m},$$

con $\overline{\lim}^n \overline{b_{n,m}} = 0$ per ogni $m \geq 1$.

Viceversa le condizioni (6) sono sufficienti per assicurare che lo sviluppo:

$$f(h) - f(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) h(\alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

definisce un funzionale trascendente intero di $[F]$, (Γ definita come precedentemente).

Si ha da (6)

$$|\delta^n f(0, h)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} b_{n,m} (\gamma_m)^n = a_{n,m} \Leftarrow \|h\|_m \leq 1, \quad m \geq 1$$

dove γ_m è la lunghezza di Γ (Γ = frontiera di F_m). Dunque la condizione (2) è automaticamente soddisfatta perchè $\overline{\lim} \sqrt[n]{b_{nm}} = 0$ per ogni $m \geq 1$.

OSSERVAZIONE. - L'estensione del teorema dimostrato e dell'esempio considerato, al caso in cui lo spazio Y dei valori è uno spazio di BANACH, o più generalmente uno spazio localmente convesso completo e separato, si può fare sostituendo a (2) e (6)

$$p \left(\frac{1}{n!} \delta^n f(0, h) \right) \leq \alpha_{nm}(p) \|h\|_m$$

e

$$|u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| \leq b_{nm}(p) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \overline{CF}_m$$

con

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_{nm}(p)} = 0$$

e

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{b_{nm}(p)} = 0$$

per ogni $m \geq 1$ e per ognuna delle seminorme p che definiscono la struttura di Y .

Si potrebbero cercare estensioni, del tipo di quelle che abbiamo dato in [1] (p. 33 e 40), per gli operatori analitici in un intorno dello zero degli spazi LN^* e $[F]$. Questa è una via che lasciamo aperta.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DOMINGOS PISANELLI, *Contribuição ao Estudo dos Operadores Analíticos*, Tese de livre-Docência, em publicação no « Bolotim da Sociedade de Matematica de São Paulo ».
- [2] J. SEBASTIÃO e SILVA, *Su Certe Classi di Spazi Localmente Convessi Importanti per le Applicazioni*, « Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni », vol. XIV, fasc. 3, (1955).
- [3] CANDIDO LIMA da SILVA DIAS, *Espaços Vectoriais Topológicos e sua Aplicação aos Espaços Funcionais Analíticos*, Tese de concurso (1951), Boletim da Sociedade de Matematica de São Paulo, 1952.