
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni.

- * C. Ferrari, F. Tricomi, Areodinamica transonica, Edizioni Cremonese, Roma, 1962 (Antonio Pignedoli)
- * R. Jancel, Les fondements de la Mécanique statistique classique et quantique, Gauthier-Villars, Paris, 1962 (Antonio Pignedoli)
- * Morris Tenenbaum, Harry Polard, Ordinary differential equations, Harper and Row Publishers, New York, Evanston, London, 1963 (Antonio Pignedoli)
- * Andrzej Grzegorzczak, Fontions Recursives, Gauthier-Villars, Paris, 1961 (Marco Cugiani)
- * Atti della II riunione del Groupement des mathématiciens d'expression latine, 1961, Edizioni Cremonese, Roma (Davide Carlo Demaria)
- * Leonida Tonelli, Opere Scelte, Vol IV, Edizioni Cremonese, Roma, 1963 (Ugo Barbuti)
- * Leonida Tonelli, Opere Scelte, Vol II, Edizioni Cremonese, Roma, 1963 (Juarez Cecchoni)
- * Leonida Tonelli, Opere Scelte, Vol III, Edizioni Cremonese, Roma, 1963 (Juarez Cecchoni)
- * A. M. Letov, Stability in non-linear control systems, Princeton University Press, 1961 (Dario Graffi)
- * R. M. Winger, An introduction to projective geometry, Dover Publications, New York, 1962 (Enrico Bompiani)
- * A. Delachet, Contemporary Geometry, Dover Publications, New York, 1962 (Enrico Bompiani)
- * S. L. Sobolev, Sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques non-linéaires, Edizioni Cremonese, Roma, 1961 (Luigi Gatteschi)
- * H. Jeffreys, Asymptotic approximations, Clarendon Press, Oxford, 1962 (Luigi Gatteschi)
- * E. T. Whittaker, G. N. Watson, A course in Modern Analysis, Cambridge University Press, 1962 (Luigi Gatteschi)
- * Clemens Thaer, Die Data von Euklid, Springer, Berlin Göttingen Heidelberg, 1962 (Pietro Lingua)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 18
(1963), n.4, p. 454–467.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_4_454_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

C. FERRARI e F. TRICOMI, *Aerodinamica transonica*, Monografie matematiche a cura del C.N.R., ed. Cremonese, Roma, 1962, di pagine 629, lire 9.000.

Ben giustamente, nella prefazione di questa importante monografia, gli Autori fanno rilevare il fatto che i voli astronautici e l'interesse dei nuovi corpi di dottrina relativi alla navigazione spaziale non determinano un « superamento » delle questioni scientifiche e tecniche che popolano — per così dire — il vasto territorio della Aerodinamica transonica. Non soltanto, infatti, permangono ampie « regioni oscure » nell'intorno del così detto « muro del supno », ma grande interesse presentano sempre le ricerche relative ai regimi transonici di flusso sia per quanto riguarda gli aeromobili in genere (compresi, naturalmente, i missili) sia per quanto concerne settori esterni al diretto interesse aeronautico, come quello delle « macchine a fluido ».

L'opera, di notevole mole e riccamente dotata di figure e di tavole, consta di sei capitoli e di una appendice. Ogni capitolo è corredato di ampia bibliografia.

Diciamo subito del terzo capitolo e della appendice, perchè essi presentano un carattere spiccatamente matematico.

Nel terzo capitolo, dopo una introduzione e dopo considerazioni generali sui teoremi di esistenza e di unicità per le equazioni di tipo misto, appare lo studio della equazione differenziale di Tricomi. Seguono il teorema di unicità nel problema di Frankl, l'esposizione di speciali soluzioni dell'equazione di Tricomi, delle soluzioni di Falkowic e della trasformata di Germain-Liger, dell'equazione di Tomotika e Tamada. Il capitolo si conclude con un paragrafo dedicato a soluzioni particolari delle equazioni esatte dell'Aerodinamica. Nella appendice appare, invece, una esposizione riassuntiva delle principali proprietà delle funzioni ipergeometriche.

Il capitolo primo è dedicato alle equazioni del moto, ai principi termodinamici ed ai teoremi generali. La grande attenzione ai « problemi di base », costituente una delle caratteristiche essenziali della monografia, si delinea già in questo primo capitolo, con paragrafi destinati alle onde d'urto ed alle conseguenze da esse prodotte.

Il secondo capitolo concerne le equazioni e le proprietà caratteristiche del flusso transonico (Particolare interesse è dedicato allo studio dei moti piani e delle trasformazioni nel piano odografico: trasformazione di Legendre, trasformazione di Molenbroeck Chaplygin). Si passa poi allo studio delle equazioni approssimate dei flussi transonici (approssimazione di Lawrentyew-Bitzadze, equazione di Tricomi ed equazione di Tricomi generalizzata, con l'approssimazione di Toewner Germain, approssimazione omografica di Legendre; approssimazione di Tomotika e Tamada, etc.). Il

capitolo si conclude con lo studio delle singolarità della trasformazione odografica, delle linee del piano odografico che corrispondono ad una linea d'urto nel piano fisico, e delle condizioni che debbono essere soddisfatte su tali linee.

Del terzo capitolo abbiamo già detto. Il quarto, il quale presenta carattere essenzialmente applicativo, è articolato su otto paragrafi.

Il primo di essi è dedicato alla applicazione del metodo odografico per la costruzione dei flussi transonici, il secondo al problema dell'ugello, le soluzioni approssimate del quale problema sono considerate nel successivo paragrafo terzo. Nel quarto paragrafo appare un esempio di calcolo numerico che ha per scopo la determinazione di un ugello atto a produrre correnti transoniche. Il quinto paragrafo è dedicato alla costruzione del flusso transonico lungo un ugello valendosi dell'equazione esatta (Lighthill, Cherry). Il sesto paragrafo contiene l'esposizione della più importante applicazione del problema degli ugelli, che consiste nella determinazione degli ugelli usati nelle gallerie supersoniche. Il settimo paragrafo è dedicato alle soluzioni fondamentali dell'equazione di Chaplygin e delle equazioni ad essa approssimate, mentre l'ottavo, che conclude il capitolo, riguarda la distribuzione della velocità lungo l'asse dell'ugello.

Il quinto capitolo della monografia, pure a carattere essenzialmente applicativo, è dedicato alla esposizione di esempi di costruzione di flussi transonici problema dei profili alari. Il problema è visto nel caso in cui i profili siano simmetrici e posti con l'asse di simmetria nella stessa direzione della velocità all'infinito \vec{q}_∞ (incidenza nulla). Il capitolo è costituito da dodici tra paragrafi e gruppi di paragrafi. Dopo una introduzione di impostazione del problema, si tratta il caso della corrente all'infinito subsonica. Indi ci si occupa della determinazione di classi di soluzioni dell'equazione del moto atte a definire flussi transonici intorno a profili alari, e delle caratteristiche geometriche dei profili alari che corrispondono alle suddette soluzioni. Segue una applicazione numerica sulla approssimazione di Tomotika e Tamada.

Il gruppo dei paragrafi successivi è dedicato allo studio di flussi transonici intorno ad astacoli con bordo di fuga non cuspidato. Il procedimento esposto è quello indicato da Lighthill per l'equazione di Chaplygin e tale procedimento viene applicato per l'equazione di Tomotika e Tamada. Viene anche ricordata la trattazione di Lighthill per l'equazione esatta.

Un paragrafo del capitolo di cui stiamo parlando è poi dedicato alla costruzione di flussi transonici intorno a profili con formazione di onda d'urto attaccata. In tale paragrafo si ottiene un'onda d'urto dotata di due proprietà di particolare interesse: la prima di esse consiste nel fatto che la linea d'onda non arriva alla linea sonica, ma si estingue nella regione supersonica terminando tangenzialmente ad una linea di Mach di compressione che parte dalla linea sonica. La seconda consiste nel fatto che l'onda è dovunque obliqua e produce, per una determinata variazione della direzione della velocità attraverso ad essa, la più piccola variazione della grandezza della velocità compatibile con la grandezza della velocità prima dell'urto e con la deviazione impressa da questo alla corrente. Inoltre il punto del profilo da cui l'onda si stacca è un punto angoloso. Si prendono allora in esame la configurazione dell'onda in vicinanza della linea sonica; le onde d'urto che arrivano alla linea sonica e separano da una regione subsonica una regione supersonica limitata, con riguardo anche alla limitazione della accelerazione nella parte supersonica del profilo e alle possibili influenze sulle cause di formazione dell'onda, la configurazione dell'onda in vicinanza del profilo.

Si passa poi allo studio della possibilità di esistenza di un punto non singolare del profilo, in cui l'accelerazione diventa infinita, e di linee limiti.

Un gruppo di paragrafi è dedicato ai teoremi di Morawetz e alle loro conseguenze. Si passa poi allo studio del caso della corrente sonica all'in-

finito. Infine, a conclusione del capitolo, ci si occupa dei flussi transonici attorno a profili alari per numero di Mach $M_\infty = 1$ e dei flussi transonici attorno a profili alari con onda d'urto staccata ($M_\infty > 1$).

Il sesto capitolo, su dodici paragrafi o gruppi di paragrafi, è dedicato allo studio del « problema diretto », caratterizzato, come si sa, da grandi difficoltà. Per quanto concerne tale problema in generale, si dà un cenno sulla sua impostazione e si espongono procedimenti approssimati, particolarmente utili per la soluzione del medesimo. La difficoltà essenziale del problema diretto consiste nel fatto che il contorno del dominio in cui la funzione incognita deve essere determinata non è, in generale, noto a priori. Tale difficoltà non si presenta in certi casi particolari, in cui la linea o le linee che delimitano nel piano fisico il campo di moto sono costituite da archi sui quali è prescritta o la direzione della velocità \vec{q}_∞ o la grandezza della medesima.

Ci si trova nel primo caso quando si consideri, per es., il problema del profilo a diedro (problema di Weinstein-Cole) o il problema del profilo a losanga (problema di Guderly e Yoshihara), ci si trova nel secondo caso quando si consideri il problema dei getti (problema di Chaplygin), nel quale la corrente, che esce da una fessura praticata in una parete piana indefinita, è delimitata da due peli liberi sui quali la pressione deve essere costante ed uguale alla pressione dell'ambiente in cui penetra il getto.

Si considerano anche problemi nei quali su una parte del contorno è prescritta la direzione e sulla rimanente parte è prescritta la grandezza della velocità (per esempio nel problema di Roshko-Mackie).

Abbiamo già accennato al fatto che nel capitolo trova posto una esposizione dei metodi approssimati di soluzione del « problema diretto ». Gli ultimi due paragrafi del capitolo stesso sono dedicati, rispettivamente, al metodo di Dorodnizyn e a problemi diversi. A conclusione sono esposti la legge delle aree ed il principio di equivalenza.

Segue l'appendice di cui abbiamo già detto in parte e che si completa con tabelle.

L'opera, molto utile anche ai tecnici, presenta — come era nel programma di una tale monografia — carattere prevalentemente fisico-matematico, è, cioè, caratterizzata da un indirizzo prevalentemente teorico. Ciò non significa affatto indirizzo meno fisico o meno chiaro per lo studioso della tecnica. Anzi l'opera stessa, caratterizzata da un profondo senso unitario, assicurato dallo stretto contatto fra gli Autori — pure nella dichiarata divisione di lavoro (Ferrari cap. I, II, IV, V, VI, Tricomi cap. III e append. sulle funzioni ipergeometriche) — è contraddistinta da un nitido senso della chiarezza dei metodi, da un limpido dosaggio delle parti essenziali e di quelle complementari.

Di essenziale interesse per i Matematici e per gli Aerodinamici, l'opera viene ad arricchire, con un contributo veramente notevole, la letteratura matematica italiana.

ANTONIO PIGNEDOLI

R. JANCEL, *Les fondements de la Mécanique statistique classique et quantique*, di pag. 408, prezzo 10 nuovi franchi, Editore Gauthier-Villars, Parigi, 1962.

L'opera appartiene al Trattato di Fisica teorica e Fisica matematica organizzato da J. L. Destouches ed è preceduta da una prefazione ad opera di Luigi De Broglie, e seguita da una ricca bibliografia.

Dopo una lucida introduzione generale, vengono le due parti di cui consta

il volume La prima parte è dedicata alla teoria ergodica e consta di quattro capitoli. Nel primo si tratta della teoria ergodica nella Meccanica statistica classica con particolare riguardo ai fondamentali teoremi di Birkhoff, von Neumann e Hopf ed alla ipotesi di transitività metrica. Nel secondo capitolo si tratta degli insiemi statistici di sistemi in Meccanica ondulatoria.

Il terzo capitolo è, invece, dedicato alla teoria ergodica nella Meccanica statistica quantica, cioè, sostanzialmente, al primo ed al secondo teorema ergodico quantico. Il quarto capitolo consta della trattazione delle teorie ergodiche quantiche in probabilità.

La seconda parte del volume, su tre capitoli, tratta dei « teoremi H ».

Il quinto capitolo (primo di tale seconda parte) è dedicato ai « teoremi H » ed alle equazioni cinetiche in Meccanica statistica classica, il sesto capitolo, invece, ai « teoremi H » ed alle equazioni cinetiche in Meccanica statistica quantica.

Il settimo capitolo contiene le conclusioni generali, con le applicazioni della Meccanica quantica e la teoria della misura quantica e della osservazione macroscopica.

Seguono tre appendici: la prima contiene complementi sulla ipotesi ergodica, sul teorema di Birkhoff, osservazioni sulla indecomponibilità metrica delle ipersuperficie e richiami sulle funzioni di struttura in Meccanica statistica classica; la seconda appendice è dedicata alle leggi di probabilità nello spazio euclideo reale ad n dimensioni, la terza è dedicata al modello di Ehrenfest e ad osservazioni sulla definizione di entropia.

Scopo generale dell'opera è quello di fare una esposizione critica dei fondamenti della Meccanica statistica, con ampio sviluppo ed approfondita discussione; non solo ma di vedere se la attuale non possibilità di dare una giustificazione del tutto rigorosa delle ipotesi di tipo ergodico, anche in Meccanica quantica (oltre che in Meccanica classica) può essere superata dall'altro processo di giustificazione dei fondamenti della Meccanica statistica, quello che si diparte dall'ipotesi boltzmanniana del « caos molecolare » e che si appoggia su dei « teoremi H » più o meno generalizzati. Ma difficoltà insorgono anche da questo punto di vista tanto in Meccanica classica quanto in Meccanica quantica. Questa la conclusione cui l'Autore giunge con una analisi raffinata e profonda nella sua molto pregevole fatica. Il punto di vista « ergodico » conserva, dunque, tutto il suo valore.

ANTONIO PIGNEDOLI

MORRIS TENENBAUM - HARRY POLARD, *Ordinary differential equations*, Harper e Row Publishers, New York. Evauston. London, 1963, pag. 808, prezzo dollari 10,75.

Si tratta di un volume in cui viene esposta la teoria concernente i metodi di integrazione delle equazioni differenziali e dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, con una vasta raccolta di problemi e di esempi.

Il libro riesce molto utile per i Fisici e per gli Ingegneri, poichè vi appaiono applicazioni meccaniche, idrodinamiche, termologiche, elettriche, ed anche biologiche (oltre che geometriche). Vi ha luogo l'esposizione dei metodi di integrazione per serie ed operazionali, con riguardo anche alla introduzione ed alle proprietà delle funzioni speciali.

Inoltre, la considerazione dei metodi numerici e del calcolo analogico, rende il libro particolarmente piacevole.

ANTONIO PIGNEDOLI

ANDRZEJ GRZEGORCZYK, *Fonctions Récursives*. Collection de logique mathématique, Serie A. Edizione 1961, Gauthier-Villars, Parigi; E. Nauwelaerts, Lovanio, pagine 100.

Partendo dalla nozione intuitiva di calcolabilità effettiva, nozione che verrà in seguito più volte ricordata, l'autore dà le definizioni rigorose di funzione ricorsiva generale, di relazione ricorsiva generale, di insieme ricorsivo generale. La funzione ricorsiva generale viene definita come funzione appartenente ad una classe chiusa rispetto a determinate operazioni.

La trattazione delle funzioni ricorsive prosegue con la introduzione di due classi particolari di funzioni ricorsive: le ricorsive primitive e le ricorsive elementari, mediante le nozioni di funzione di coppia e di funzione universale viene dimostrato come queste classi particolari di funzioni ricorsive siano contenute nella classe delle ricorsive generali, ottenendo poi una forma canonica per queste ultime. Relativamente agli insiemi non ricorsivi, l'autore dà una definizione di insieme ricorsivamente numerabile e aggiunge le dimostrazioni di alcune proprietà di tali insiemi.

Come applicazione delle nozioni fin qui introdotte, l'autore dimostra la ricorsività dell'insieme delle formule correttamente costruite dell'aritmetica elementare dei numeri naturali, dell'insieme degli assiomi e dell'insieme delle dimostrazioni di tale teoria e, mostrando come l'insieme dei suoi teoremi sia un insieme ricorsivamente numerabile, giunge a dare la definizione di teoria decidibile.

Successivamente sfruttando la nozione di rappresentazione di relazioni ricorsive in aritmetica, ottiene una nuova definizione di relazione ricorsiva generale del tutto equivalente a quella data inizialmente e, d'altra parte, in una forma atta ai suoi scopi.

Infine deduce da quanto detto la dimostrazione del teorema di Gödel sull'indecidibilità dell'aritmetica elementare dei numeri naturali, mostrando più precisamente l'indecidibilità essenziale di tale teoria e di conseguenza il suo carattere di incompletezza.

MARCO CUGIANI

Atti della II riunione del Groupement des mathématiciens d'expression latine, 1961 editi dalla Unione Matematica Italiana, Edizioni Cremonese, Roma, 1963; pp. XII + 288, L. 4.000.

L'Unione Matematica Italiana ha raccolto in questo volume gli Atti della II riunione del Groupement des Mathématiciens d'expression latine che ebbe luogo prima a Firenze dal 26 al 30 settembre 1961 e poi a Bologna dal 1° al 3 ottobre 1961.

Nelle prime pagine si trovano l'elenco dei membri del Comitato esecutivo del Groupement per gli anni 1957-61 e dei Comitati esecutivo ed onorario della Riunione, il programma scientifico e la lista dei 150 partecipanti al convegno.

Indi al testo del discorso inaugurale « La matematica nella scienza e nella vita moderna » tenuto dal Presidente del Groupement, Prof. G. Sansone, segue la parte del volume dedicata alla pubblicazione delle 13 conferenze e dei principali interventi relativi ad alcune di esse.

Ed eccone l'elenco dettagliato:

K. Kuratowski, *Quelques remarques sur le rôle des espaces et des méthodes topologiques dans les mathématiques modernes.*

- H. Cartan, *Problèmes d'approximation dans la théorie des fonctions analytiques*
- J. Mikusiński, *Calcul opérationnel algébrique.*
- J. Wloka, *Fast induktive Limites und Distributionen.*
- L. Nachbin, *Sur l'approximation polynomiale pondérée des fonctions réelles continues*
- R. Croisot, *Contribution à l'étude des modules sur un anneau non commutatif*
- P. Samuel, *Les anneaux factoriels.*
- J. Tits, *Géométries polyédriques et groupes simples*
- L. Waelbroeck, *Etude spectrale des b algèbres.*
- J. Leray, *Complément à l'exposé de Waelbroeck. Etude spectrale des b -algèbres*
- J. Sebastião e Silva, *Sur le calcul symbolique des opérateurs à spectre non borné ou vide*
- A. Lichnerowicz, *Propagateurs, commutateurs et anti commutateurs en Relativité générale.*
- A. Pastori, *Intervento sulla conferenza di A. Lichnerowicz*
- C. Cattaneo, *Intervento sulla conferenza di A. Lichnerowicz*
- A. Haefliger, *Sphères nouées*
- V. Poenaru, *Immersiones et applications de rang maximum.*
- J. Kampé de Fériet, *Sur les intégrales aléatoires des équations aux dérivées partielles et la Mécanique statistique des milieux continus*
- G. Prodi, *Osservazioni sulla conferenza di J. Kampé de Fériet.*
- C. Jacob, *Sur quelques problèmes mathématiques de la dynamique des fluides compressibles.*
- N. Teodorescu, *La dérivée aréolaire et les fonctions analytiques généralisées en dynamique des fluides compressibles*
- F. G. Tricomi, *Intervento sulla conferenza di C. Jacob*
- G. C. Moisil, *Applicazioni dell'algebra alle calcolatrici moderne*

Questo volume — sia pure nel limitato numero degli argomenti trattati — offre, non soltanto per la competenza dei conferenzieri, ma anche per gli importanti contributi apportati dagli interventi sulle conferenze stesse, una visione, aggiornata sino ai più recenti sviluppi, di alcune questioni della matematica moderna

DAVIDE CARLO DEMARIA

LEONIDA TONELLI, *Opere scelte*, a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, vol. IV; Edizioni Cremonese, Roma, 1963; VI + 330 pp.; L. 4.000.

È l'ultimo dei quattro volumi di una scelta delle opere di Leonida Tonelli, affidata dall'Unione Matematica Italiana ad una Commissione composta di allievi del Maestro e presieduta da S. Cinquini.

Tale volume raccoglie 28 pubblicazioni, di vario argomento, distribuite in quattro gruppi: serie trigonometriche, equazioni differenziali ordinarie, equazioni integrali, funzioni analitiche ed altre pubblicazioni, i lavori di

ogni gruppo sono presentati secondo l'ordine cronologico generale, apparso per la prima volta in una commemorazione fatta da S. Ciquini, nel 1946, all'Istituto Lombardo di Scienze e lettere, e contrassegnati da un numero.

Il primo gruppo sulle serie trigonometriche, che prevale in estensione sugli altri, si riferisce al periodo 1925-1937, con maggiore frequenza di lavori stampati negli anni 1925-1927, nel quale periodo il Tonelli pubblicò il ben noto trattato sulle serie trigonometriche (1928), esso contiene 12 lavori. Iniziano questo gruppo due note lincee ([61], [62]) in cui sono conseguiti risultati che sono ormai tradizionali nella trattatistica: in [61] si danno condizioni sufficienti per la convergenza puntuale, in punti singolari isolati, della serie di Fourier, che si allineano a proposizioni di La Vallée Poussin, Lebesgue e Young, in [62] si assegna un criterio di convergenza assoluta, per la medesima serie, il quale si affianca ad altro ben noto di S. Bernstein.

La memoria [63] è dedicata alla formula di Parseval, in essa l'Autore prova la omonima identità per funzioni di due variabili $f(x, y)$, sotto la condizione di integrabilità della $f(x, y)$ nel senso di Lebesgue, assieme al suo quadrato, con ragionamenti del tutto originali, ritrovando così un risultato stabilito dal Kustermann, nelle ipotesi che $f(x, y)$ fosse limitata e integrabile nel senso di Riemann.

La seguente memoria [72] ha per indagine la convergenza della formula d'interpolazione trigonometrica di Bessel, relativa a funzioni continue, con derivata a variazione limitata, tale convergenza è conseguita con metodo diretto ed elementare.

La fondamentale memoria [80], comunicata dalla precedente nota [73] sui « Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », è un'analisi sottile e accurata sulla convergenza delle serie doppie di Fourier. In essa il Tonelli, utilizzando la nozione di variazione limitata per funzioni di due variabili, da Lui medesimo introdotta nei Suoi approfonditi studi sulla teoria dell'area, realizza una ben riuscita sintesi di quasi tutti i criteri di convergenza puntuale e uniforme della serie doppia di Fourier.

Seguono due note minori: una lincea [81] sulla derivazione per serie e una nota sul « Bollettino della Un. Mat. It. » relativa ad una semplice dimostrazione del teorema di chiusura del sistema delle funzioni trigonometriche, ben conosciuta da chi seguì i corsi di analisi superiore del Tonelli.

La breve nota [93] è di natura polemica e, come tutti gli scritti polemici del Tonelli, il lettore la troverà pungente ed arguta: è una precisazione ad un rilievo mosso da J. D. Tamarkin in una recensione del trattato sulle serie trigonometriche, pubblicata da quest'ultimo sul « Bulletin of the Am. Math. Soc. ».

Nella nota [97], discorsiva e di carattere riassuntivo sui concetti informatori del trattato sulle serie trigonometriche, risentiamo la freschezza e la limpidezza delle lezioni, sempre attraenti, del Tonelli, con le quali, Egli, aveva la virtù di condurre, e in breve tempo, anche l'ascoltatore disavveduto, alle panoramiche più interessanti e fruttuose delle più complicate teorie analitiche.

Termina il gruppo, ancora, una approfondita memoria sulle serie doppie di Fourier, legata ad altra di L. Cesari.

Il gruppo secondo, sulle equazioni differenziali ordinarie, contiene 5 lavori scritti negli anni 1925-1939, con più frequenza negli anni 1925-1927. Sembra che il Tonelli si sia soffermato su questa tematica, quasi ad interrompere, in qualche periodo, la fatica che lo conduceva alle Sue belle ricerche di calcolo delle variazioni. Nella introduzione alla nota [58], che apre questo gruppo e che è dedicata al problema della unicità della soluzione di una equazione differenziale ordinaria, Egli dice: « La lettura della nota del prof. Bompiani, su un teorema di confronto per le equazioni differenziali ordinarie, mi ha fatto ripensare ad alcune mie vecchie ricerche, che, interrotte nel 1915 al sopraggiungere della guerra, non furono mai

riprese. Mi riprometto, appena i miei attuali studi me lo consentiranno, di ritornare a quelle ricerche, ma, intanto, voglio da esse stralciare » e nella nota [58] si fa una luminosa sintesi di alcuni criteri d'unicità di Osgood, Bompiani e Peano.

La breve nota successiva [74] prova, con pochissime battute e qualche accento polemico (come generalmente era Suo stile), l'inconcludenza di un presunto procedimento costruttivo di N. Saltykow, relativo all'integrale della equazione $y' = f(x, y)$, nella sola ipotesi di continuità del secondo membro.

Uno degli aspetti più interessanti, e non largamente conosciuto, del pensiero matematico tonelliano è quello, forse dovuto alla Sua potenza di penetrazione intellettuale, che lo portava a considerare il problema da affrontare nella sua intima individualità e a scoprire, quasi sempre, la strada maestra per trattarlo e risolverlo, quella strada, cioè, che non tocca elementi contingenti, ma punta, per così dire, dritta al cuore della questione, sicché non è infrequente che i ragionamenti usati dal Tonelli, nei Suoi teoremi, abbiano una più larga validità, rispetto alle ipotesi in essi fatte. Un esempio in proposito (e non certo il solo) il lettore lo potrà trovare nella breve nota [83], nella quale l'Autore, ritornando sul classico teorema di Sturm, relativo alla separazione degli zeri degli integrali di una equazione differenziale lineare, e del quale Egli aveva dato, con interessi in calcolo delle variazioni, una semplicissima dimostrazione nel volume secondo dei Suoi « Fondamenti », osserva come il ragionamento usato in quella dimostrazione sia valido nelle più larghe ipotesi che la equazione differenziale del secondo ordine sia omogenea rispetto a y, y', y'' e sussista per essa un teorema d'unicità.

Il numero [118] (della raccolta. Scritti Matematici offerti a L. Berzolari) è un estratto di una lettera del Tonelli a G. Sansone, nel quale lo scrivente si intrattiene su una questione riguardante il comportamento asintotico degli estremi relativi degli integrali di una equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Il numero [127], che chiude il gruppo dei lavori sulle equazioni differenziali, e un'ampia nota sul problema della esistenza della soluzione della equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$, che assume prescritti valori in due punti assegnati, legata ad una memoria di G. Scorza Dragoni.

Il gruppo delle pubblicazioni sulle equazioni integrali contiene solo tre lavori (apparsi negli anni 1928-1929) e non per questo il gruppo è meno interessante degli altri. La breve memoria [86] riguarda il problema della esistenza delle soluzioni di equazioni integrali del tipo del Volterra, in essa l'Autore mostra come il metodo di Cauchy, atto a stabilire l'esistenza dell'integrale di una equazione differenziale ordinaria, sia valido anche per le dette equazioni integrali e ne fornisce, poi, una semplicissima elaborazione che preannuncia la terza memoria del gruppo.

La memoria [87], che fa seguito, riguarda un classico problema di Abel, d'interesse fisico-matematico e che si traduce in una equazione integrale, ancora del tipo del Volterra, in essa l'Autore fa un accurato e completo esame delle condizioni di risolubilità del detto problema.

La memoria [91], sul « Bull. Calcutta Math. Soc. », che chiude il gruppo, è divenuta classica per i larghi servizi che ha recato in varie questioni d'analisi esistenziale, essa è una elaborazione del procedimento, già indicato nella memoria [86], adattato ad una vasta classe di equazioni funzionali, sempre del tipo del Volterra. Questa memoria realizza un'esigenza costante nel pensiero matematico del Tonelli, in problemi esistenziali, che è quella di appellarsi essenzialmente a procedimenti costruttivi.

L'ultimo gruppo, che raccoglie lavori sulle funzioni analitiche ed altre questioni, contiene 8 pubblicazioni, quasi tutti lavori giovanili, del periodo 1909-1911.

La nota [5] è una dimostrazione, d'ispirazione geometrica, di un noto

teorema di Hadamard, sul valore maggiorante di un determinante, quel ragionamento è ben noto a chi ebbe l'occasione fortunata di ascoltare le Sue lezioni di analisi superiore, negli anni in cui Egli esponeva la teoria delle equazioni integrali.

Seguono due note lincee. la [6] sulla convergenza della serie di Dirichlet, nella quale viene notevolmente esteso un criterio di convergenza, e la [9], sugli zeri della funzione limite di una successione di funzioni analitiche, nella quale viene dato un criterio generale perchè un punto del piano complessso sia uno zero per una funzione analitica regolare, limite di una successione di funzioni analitiche regolari.

Si hanno poi una nota lineea [11] ed una lunga memoria [12], su un algoritmo d'iterazione, lavori, questi, suggeriti dal Pincherle.

La nota [16] è un'indagine sulle serie del tipo $\sum \alpha_n(x)^{n^2} x$, ove $\alpha_n(x)$ è una funzione analitica, studiate come algoritmo valido a rappresentare rami di funzioni analitiche regolari si tratta ancora di un lavoro collegato a studi del Pincherle

Chiudono il gruppo, ed anche il volume, due rievocazioni. una [119] di Andrea Razmadzé e l'altra, affettuosa [120], del Maestro Salvatore Pincherle, per il quale Egli serbò sempre profonda devozione. La scelta delle pubblicazioni, raccolte in questo volume, presenta, dunque, un Tonelli minore, ma questa raccolta è, da sola, pienamente valida a descrivere alcuni tra gli aspetti più caratteristici del Suo pensiero, l'acume del Suo forte intelletto, la notevole potenza creativa del Suo bello ingegno.

Buona è la stampa, la veste tipografica è la medesima degli altri volumi della collezione delle opere dei Grandi Matematici Italiani, voluta dall'Unione Matematica, collezione che viene così ad arricchirsi

UGO BARBUTI

Opere di L. Tonelli - Volume II.

In questo II volume delle opere di L. Tonelli la commissione, a questo scopo nominata dalla U.M.I., ha voluto raccogliere tutte le ricerche di Calcolo delle Variazioni che hanno preceduto la pubblicazione dei « Fondamenti ».

Da queste è possibile ricostruire agevolmente il cammino percorso dal Sommo Scienziato per giungere alla edificazione del Suo metodo diretto: dai primi lavori nei quali si comincia ad usare quella proprietà dei funzionali che è la semicontinuità, a quelli nei quali lo studio di tale proprietà è messo a fondamento dell'intero metodo.

Il volume si apre con la prima ricerca compiuta da Tonelli in calcolo delle variazioni, in essa l'A. considerata una integranda $F(x, y, x', y')$ continua e positivamente omogenea di grado, dimostra che per ogni coppia di rappresentazioni assolutamente continue di una stessa curva parametrica rettificabile risultano coincidenti i corrispondenti valori degli integrali di Lebesgue.

Già nella seconda ricerca, di poco posteriore alla precedente, si trova un inizio del metodo diretto in essa l'A., nello stabilire un teorema di esistenza del minimo per integrali definiti e regolari, riconosce il carattere semicontinuo di questi funzionali (senza impiegare tale terminologia) e di questo si serve per ottenere il minimo del funzionale. A questo scopo Egli dimostra che nella classe di integrande presa in considerazione gli integrali di Weierstrass e di Lebesgue coincidono sopra ogni curva rettificabile.

Nonostante la prova di quest'ultima affermazione sia ancora fondata sul fatto che il problema è, in queste ipotesi, localmente risolvibile, già si nota, da parte del Tonelli, la tendenza a subordinare il carattere estremale delle soluzioni, alla proprietà di essere minimanti: Egli prova infatti che in un

caso particolare del problema considerato la minimante soddisfa le equazioni di Eulero

Il confronto fra gli integrali di Weierstrass e di Lebesgue su di una curva parametrica rettificabile viene ripreso e completato in una successiva ricerca nella quale viene provata la loro coincidenza per tutte le integrande $F(x, y, x', y')$, in questa ricerca vengono inoltre stabiliti alcuni teoremi di convergenza e di confronto per gli integrali che si riveleranno di importanza fondamentale.

Successivamente il teorema di esistenza del minimo è esteso agli integrali quasi regolari, definiti positivi, la memoria in cui questa estensione è effettuata è veramente notevole: in essa è dato grande risalto alla semicontinuità del funzionale (anche la notazione è usata) ed il problema della semicontinuità è oggetto di una separata trattazione

Il valore della semicontinuità è messo in piena luce nella successiva nota lineea « Sulle funzioni di linee » ove il Tonelli mette in evidenza il carattere restrittivo della continuità dei funzionali provando che se il funzionale è continuo necessariamente la integranda è lineare nel complesso delle x' e y'

In una fondamentale memoria (pubblicata due anni dopo in lingua francese e preceduta da due comunicazioni alla Accademia delle Scienze di Parigi) il metodo diretto è ormai edificato in questa (in cui a differenza delle precedenti il Tonelli considera il problema non parametrico) la semicontinuità dei funzionali regolari è provata in modo indipendente dalla condizione che il problema sia localmente risolto ed è provato anche che le minimanti soddisfano le equazioni di Eulero

Sono trascorsi appena quattro anni dalla prima ricerca di Calcolo delle variazioni ed il metodo diretto ha raggiunto, come Egli stesso ebbe a dire, la forma definitiva: la possibilità di svincolarsi dalla ipotesi che il problema sia localmente risolubile, della quale il Grande variazionista si era convinto fin dai primi lavori, è ormai una realtà!

Oltre alle memorie sopra citate, e come queste anteriori alla prima Grande Guerra, il volume contiene alcune importanti ricerche sul problema degli isoperimetri, sul problema delle orbite periodiche e due importanti memorie, anch'esse dedicate alle applicazioni, una dedicata al problema della stabilità di una massa liquida sottoposta alle sole forze molecolari ed una dedicata alla proprietà di minimo volume della sfera, proprietà che viene stabilita con un elegantissimo ragionamento geometrico.

Il volume si conclude con due importanti memorie (pubblicate nell'immediato dopoguerra) dedicate prevalentemente al problema parametrico, nelle quali la trattazione riceve un alto grado di finalit . Nella prima di queste la teoria della semicontinuit  viene rielaborata (anche per il caso parametrico viene liberata dalla ipotesi che il problema sia preliminarmente risolto in piccolo) ed   oggetto di ampio studio non soltanto per ci  che si riferisce alle condizioni sufficienti ma anche per le condizioni necessarie, in essa vengono anche posti in luce i significati che le condizioni di Weierstrass e di Legendre hanno rispetto al nuovo metodo. Nella seconda memoria viene ampiamente studiato il problema del minimo: vengono introdotte la classificazione e la terminologia che diventeranno poi di uso comune e vengono prese in considerazione le varie classi di integrali.

Una completa esposizione del metodo diretto, che tanta influenza dovr  esercitare nelle successive ricerche di Calcolo delle variazioni, apparir  poco dopo nei « Fondamenti ».

JAUREZ CECCONI

Opere di L. Tonelli - Volume III.

  In questo volume sono raccolte tutte le ricerche di Calcolo delle variazioni che L. Tonelli effettu  dopo il 1926, il volume da perci  una chiara

idea del grande contributo dato dal Tonelli al Calcolo delle variazioni 'posteriormente ai « Fondamenti ».

I lavori che il volume contiene possono in un certo senso essere raggruppati in due categorie una, della quale fanno parte ulteriori ricerche sugli integrali curvilinei, ed una seconda dedicata allo studio di nuovi problemi di calcolo delle variazioni.

Le ricerche appartenenti alla prima categoria sono dirette ad una duplice finalità; da una parte si propongono di perfezionare la trattazione apparsa sui « Fondamenti » dall'altra di ampliarla.

Di fondamentale importanza in questa prima categoria è il gruppo di lavori dedicato agli integrali curvilinei in forma ordinaria nei quali questa teoria raggiunge la sua forma definitiva sia per il modo secondo il quale è impostato lo studio della semicontinuità, sia per la generalità delle proposizioni riguardanti l'esistenza del minimo, sia per quanto si riferisce alle proprietà delle estremanti.

Fra gli altri contributi al calcolo delle variazioni degli integrali curvilinei che il volume contiene si devono citare una ricerca sul cosiddetto fenomeno di Lavrentieff (pubblicata in Russia), una importante memoria nella quale è fatta un'ampia generalizzazione e contemporaneamente una sintesi di due teoremi dati, rispettivamente da H. Hahn e C. Carathéodory per il problema parametrico ed un gruppo di ricerche sulla semicontinuità e sulle proprietà delle estremanti dei problemi di Mayer e di Lagrange nelle quali sono estesi e semplificati alcuni teoremi dati da B. Manià.

Fra i lavori destinati allo studio di nuovi problemi di calcolo delle variazioni risaltano le due memorie destinate rispettivamente allo studio della semicontinuità ed alla esistenza del minimo degli integrali estesi ad una superficie ordinaria.

In queste due ricerche, veramente fondamentali per l'importanza dei risultati raggiunti e per la ricchezza dei metodi impiegati, L. Tonelli (servendosi del concetto di funzione di due variabili assolutamente continua (mediante il quale aveva potuto in precedenza caratterizzare le superficie ordinarie la cui area è espressa dall'integrale classico) imposta e porta ad un elevato grado di sviluppo lo studio, mediante il metodo diretto, dei problemi variazionali relativi agli integrali doppi in forma ordinaria.

Oltre alle ricerche ora ricordate occupano un posto rilevante in questo volume le tre note lincee nelle quali L. Tonelli perviene in modo elegantissimo alla soluzione (data poco tempo prima da J. Douglas) dei problemi di Plateau e della superficie di area minima: il primo dei quali è riconosciuto dal Tonelli al problema di minimo per un integrale doppio in forma ordinaria cui si applica immediatamente il metodo diretto. In tale ricerca il Tonelli si serve di alcuni criteri di uguale continuità che si sono rivelati utili in altri campi dell'Analisi.

Il volume contiene anche un'importante ricerca sul minimo degli integrali cosiddetti di Fubini-Tonelli, una ricerca sul problema di Lord Rayleigh (dal Tonelli ricondotto ad un problema isoperimetrico) alcune conferenze sul valore del metodo diretto e sui risultati con esso raggiunti e si conclude con due ricerche su di un problema di alta tecnica la cui soluzione dipendeva dal minimo di un nuovo tipo di integrale curvilineo in forma ordinaria. La seconda di queste ricerche, compiuta dal Tonelli dopo il periodo bellico (nell'ultima parte del quale, come Egli stesso ebbe a dire, si era dedicato ai Suoi doveri verso la patria) è l'ultima che il Grande Scienziato poté condurre a termine.

A. M. LETOV, *Stability in non-linear control systems*, Princeton Press, 1961.

È ben nota l'importanza concettuale e pratica degli studi sulla stabilità dei dispositivi a controllo. Se però questi dispositivi contengono qualche elemento non lineare essi vengono rappresentati da equazioni differenziali di difficile integrazione. È perciò molto utile un metodo, dovuto al Lu're, valido quando la caratteristica dell'elemento non lineare ha una forma molto comune nella pratica. Essenzialmente il metodo del Lu're consiste nel costruire una opportuna funzione di Liapunoff da cui si può ridurre la stabilità del dispositivo alla discussione di un sistema di equazioni algebriche. Nel libro in esame è esposto, non solo il metodo del Lu're, ma anche diverse sue estensioni e semplificazioni dovute a studiosi russi e, specialmente, all'Autore. Numerosi esempi, anche d'interesse pratico, illustrano i metodi cui si è accennato.

Il libro del Letov è perciò di notevole interesse per tutti gli studiosi di problemi non lineari.

DARIO GRAFFI

R. M. WINGER, *An introduction to projective geometry*, Dover Publications, Inc., New York, 1962, p. XIII + 443.

Questo volume è una nuova edizione di un'opera pubblicata per la prima volta quaranta anni fa (presso la D C Heath & Co). Se si risale a quella data, l'opera doveva certo avere un interesse di novità e per la trattazione analitica della geometria proiettiva (preceduta in Italia dalle Lezioni di Geometria Analitica di G. Castelnuovo del 1906) e per gli argomenti trattati quali lo studio del gruppo proiettivo e la geometria non euclidea secondo F Klein. Ciò spiega l'enorme diffusione avuta da questo testo scolastico negli Stati Uniti, in Inghilterra e nel Canada. Ed è questa diffusione che deve aver motivata la presente edizione.

ENRICO BOMPIANI

A. DELACHET, *Contemporary Geometry*, Dover Publications, Inc., New York, 1962, p. XIX + 94.

L'originale francese di questo volumetto è apparso una dozzina d'anni fa nella Collezione « Que sais je? » della Presses Universitaires de France. Esso contiene un'introduzione storica (che si appoggia largamente ai classici della geometria in Francia) e tre parti dedicate alla nozione di gruppo, agli spazi astratti, alla topologia. È un'esposizione piacevole da cui il Lettore può farsi un'idea dello sviluppo di queste idee essenziali alla matematica contemporanea ma non può pretendere un'informazione specifica.

ENRICO BOMPIANI

S. L. SOBOLEV, *Sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques non-linéaires*, Monografie Matematiche a cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Ed. Cremonese, Roma, 1961, pp. 144, L. 2.000.

In questa breve Monografia sono esposte le Lezioni che l'Autore ha tenuto ad un corso del C.I.M.E. (Varenna, 1956) e che ha successivamente ripetute al Collège de France (Parigi, 1957) ed all'Università di Mosca (1957-58).

Si tratta di 8 lezioni su alcune questioni della teoria delle equazioni non lineari alle derivate parziali ed in particolare sulla dipendenza delle soluzioni dalle condizioni iniziali. Nonostante la specializzazione degli argomenti esposti la Monografia è di agevole lettura, si sente solo la mancanza di riferimenti bibliografici.

Ottima la veste tipografica che è quella solita della Collezione cui il volume appartiene

LUIGI GATTESCHI

H. JEFFREYS, *Asymptotic approximations*, Clarendon Press, Oxford 1962, pp. 144, 30 s.

Si tratta di una pregevole Monografia nella quale vengono esposti i fondamenti della teoria degli sviluppi asintotici assieme ad alcune applicazioni alle funzioni speciali ed alla teoria della diffrazione.

La materia è suddivisa in otto capitoli.

Introdotta la serie asintotica, si passa ad una esauriente trattazione del metodo del colle e si considera anche l'importante caso della confluenza di due colli che conduce a sviluppi asintotici contenenti funzioni di Airy.

Lo studio asintotico degli integrali di una equazione differenziale del secondo ordine viene affrontato principalmente col metodo di Langer (che può farsi risalire a Liouville) consistente nella traduzione dell'equazione differenziale in equazione integrale di Volterra.

I capitoli 4, 5, 6 riguardano le applicazioni alle funzioni speciali e vi sono esposti alcuni moderni risultati sul comportamento asintotico delle funzioni di Bessel, delle funzioni ipergeometriche confluenti con speciale riguardo al caso particolare delle funzioni del cilindro parabolico (o di Weber) e delle funzioni di Mathieu.

L'importante questione della valutazione del resto nelle formule asintotiche è trattata nel settimo capitolo.

Nel capitolo ottavo vengono infine studiati alcuni sviluppi asintotici connessi alla teoria della diffrazione.

Data la grande importanza che i metodi asintotici hanno assunto nella Matematica moderna è quasi superfluo sottolineare l'importanza del volume.

LUIGI GATTESCHI

E. T. WHITTAKER, G. N. WATSON, *A course of Modern Analysis*, 4th Ed. Reprinted, Cambridge University Press 1962, pp. 616, Students' Ed. 27 s. 6 d.

È la settima ristampa, in edizione economica, della quarta edizione (1927) del classicissimo trattato che per più di mezzo secolo (la prima edizione

e del 1902) ha costituito l'unica fonte di consultazione sulle applicazioni dell'Analisi alle Funzioni Speciali.

Il volume, che non ha ovviamente bisogno di presentazione, si compone, come è noto, di due parti, la prima delle quali è dedicata ai procedimenti classici dell'Analisi Matematica, mentre nella seconda vengono trattate le principali funzioni trascendenti.

Nella prima parte, composta di 11 capitoli, si trovano chiaramente esposti i seguenti argomenti. Numeri complessi Teoria dei limiti Funzioni continue e convergenza uniforme Integrale di Riemann Proprietà fondamentali delle funzioni analitiche Teoria dei residui e sua applicazione al calcolo di integrali definiti Sviluppi in serie Sviluppi asintotici e serie sommabili Serie trigonometriche Equazioni differenziali lineari - Equazioni integrali

Nella seconda parte, pure composta di 11 capitoli, vengono dettagliatamente studiate le seguenti funzioni speciali Funzione gamma Funzione zeta di Riemann Funzione ipergeometrica Funzioni di Legendre Funzioni ipergeometriche confluenti Funzioni di Bessel Le equazioni della Fisica Matematica Funzioni di Mathieu Funzioni ellittiche di Weierstrass Funzioni theta Funzioni ellittiche di Jacobi Funzioni di Lamé

LUIGI GATTESCHI

CLEMENS THAER, *Die Data von Euklid*, Springer ed., Berlin Göttingen Heidelberg 1962, pp. 73, s. i.p..

Clemens Thaer, già noto come autore di una pregevole traduzione tedesca degli « Elementi » (Ostwalds Klassiker, vol. 235/243), edita negli anni 1933-'37, pubblica ora una traduzione dei *Δεδομένα*, condotta sul testo greco curato da H. Menge (Leipzig, 1896), per l'edizione critica delle opere di Euclide, diretta dallo Heiberg.

L'apparato critico, pur non essendo pesante, è abbastanza notevole, per una traduzione; esso però si limita a quei punti, in cui le varianti testuali possono avere influenza sulla validità, o almeno sull'eleganza del ragionamento euclideo. In realtà era da attendersi dal Thaer una tale impostazione, data l'attività filologica di lui, che già da tempo viene condotta sui testi greco ed arabo. La critica testuale si svolge nell'appendice (dieci pagine di note, in tutto, tra critiche ed esplicative). Sarebbe desiderabile che venisse riportato almeno il testo greco, se non anche quello arabo, dei passi controversi.

Le note esplicative sono estremamente chiare, e, in genere, si limitano a tradurre in linguaggio moderno, o in simbolismo algebrico o trigonometrico, il contenuto delle proposizioni euclidee.

Opportuno pare il diligente richiamo dei passi paralleli degli « Elementi », come pure la chiara esposizione dello spirito informatore dei *Data*, quale opera di Algebra Geometrica, e coronamento degli « Elementi ».

PIETRO LINGUA