
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GINO ARRIGHI

**Metodi di calcolo in un codice lucchese del
Trecento. Regola del “chatuino” e
problemi di secondo grado.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 18
(1963), n.4, p. 433–445.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_4_433_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Metodi di calcolo in un codice lucchese del Trecento

Regola del "chatulno,, e problemi di secondo grado

Nota di GINO ARRIGHI (a Lucca) (*)

Sunto. - *Nella intenzione di presentare alcuni metodi di calcolo usati in passato, mi varrò, con opportune illustrazioni, di certe pagine ch'io stralcio da un codice lucchese del Trecento il quale, per sicuro motivo, dico fornirmi un testo redatto nei primissimi anni di quello stesso secolo (1).*

Mi occuperò, successivamente, della regola del «châtulno» e di problemi del secondo grado o di grado superiore ma riducibili ai gradi inferiori.

« Elchataieym quidem arabice, latine duarum falsarum posicionum regula interpretatur, per quas fere omium questionum solutio invenitur; etc » così scrive LEONARDO PISANO nel suo *Liber Abaci* (2). In effetti somma è la importanza attribuita dagli abbachisti ad una tale regola di cui l'anonimo autore del *Trattato di pratica d'arismetica*, illustrato distesamente da BALDASSARRE BONCOMPAGNI (3), dice: « Lo chatain Sechondo Leonardo pisano è nome

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 15 giugno 1963.

(1) Biblioteca Governativa di Lucca; ms 1754. Di questo codice cartaceo, scritto da più di una mano, avevo già avuto occasione di parlare; vedi GINO ARRIGHI, *Contributi alla storia della matematica in Lucca durante il medioevo in* « Actes du VIII^e Congrès International d'Histoire des Sciences, Florence-Milan 3-9 settembre 1956 », vol. I, pp. 106-108.

(2) Pubblicato da BALDASSARRE BONCOMPAGNI, Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857, inizio del cap. 13 a p. 318.

(3) *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*, Roma, Tipografia delle belle arti, 1854; p. 333.

arabico cioè parlare d'Arabia e in nostra lingua è a dire 2 positioni bugiarde. E però reghola del chatain si dicie reghola di 2 false positioni».

Adesso, dopo certe note di carattere esplicativo della materia, presento, in Appendice, alcuni problemi o, come allora si diceva, «ragioni» trattati con tale regola e che, nel citato codice, vanno dalla riga 18 di c. 26 r. sino alla fine di c. 30 v.: marginalmente, e di mano posteriore, leggesi il titolo «Doppia positione».

Passando alle spiegazioni, avverto che le funzioni che introdurrò sono in realtà polinomi di primo grado nelle variabili indicate.

I. - Si consideri la equazione

$$\varphi(x) = a.$$

Attribuendo ad x i valori α e β avremo ordinatamente

$$\varphi(\alpha) = a + \Delta' \quad \varphi(\beta) = a + \Delta''$$

e quindi, con c quantità nota, sarà

$$\varphi(\alpha) - \varphi(x) = c(\alpha - x) = \Delta' \quad \varphi(\beta) - \varphi(x) = c(\beta - x) = \Delta'';$$

da qui segue la

$$\frac{\alpha - x}{\beta - x} = \frac{\Delta'}{\Delta''}$$

che ci fornisce

$$x = \frac{\alpha\Delta'' - \beta\Delta'}{\Delta'' - \Delta'}.$$

II. - Si consideri il sistema

$$\varphi(x, y) = a$$

$$\varphi_1(x, y) = a_1.$$

Dalla prima equazione si ricava $y = y(x)$ e, sostituendo nella

seconda, si ottiene

$$\varphi_1[x, y(x)] = a_1.$$

Attribuendo ad x i valori α e β avremo ordinatamente

$$\varphi_1[\alpha, y(\alpha)] = a_1 + \Delta' \quad \varphi_1[\beta, y(\beta)] = a_1 + \Delta''$$

e quindi, con c quantità nota, sarà

$$\varphi_1[\alpha, y(\alpha)] - \varphi_1[x, y(x)] = c(\alpha - x) = \Delta'$$

$$\varphi_1[\beta, y(\beta)] - \varphi_1[x, y(x)] = c(\beta - x) = \Delta''.$$

Da quanto sopra segue la solita

$$\frac{\alpha - x}{\beta - x} = \frac{\Delta'}{\Delta''}$$

che ci fornisce la x ; la y è presto trovata di conseguenza.

III. - Si consideri il sistema

$$\varphi(x, y) = a$$

$$\varphi_1(y, z) = a_1$$

$$\varphi_2(z, x) = a_2.$$

Dalla prima equazione si ricava $y = y(x)$ e, sostituendo nella seconda, si ottiene

$$\varphi_1[y(x), z] = a_1.$$

Da questa si ricava $z = z(x)$ e, sostituendo nella terza, si ottiene

$$\varphi_2[z(x), x] = a_2.$$

Attribuendo ad x i valori α e β avremo ordinatamente

$$\varphi_2[z(\alpha), \alpha] = a_2 + \Delta' \quad \varphi_2[z(\beta), \beta] = a_2 + \Delta''$$

e quindi, con c quantità nota, sarà

$$\varphi_1[\alpha(\gamma), \alpha] - \varphi_1[\alpha(x), x] = c(\alpha - x) \doteq \Delta$$

$$\varphi_1[\alpha(\beta), \beta] - \varphi_1[\alpha(x), x] \doteq c(\beta - x) = \Delta''$$

Da quanto sopra sopra segue la solita

$$\frac{\alpha - x}{\beta - x} = \frac{\Delta'}{\Delta''}$$

che ci fornisce la x ; la y e la z sono presto trovate di conseguenza.

Ho provveduto a contrassegnare le «ragioni» ch'io pubblico con uno, due o tre asterischi (*), secondochè esse si rifanno, ordinatamente, al primo, al secondo o al terzo tipo.

* * *

Venendo a parlare della seconda questione dirò che la c. 81 r., dopo il titolo «Algebra», porta regole ed esercizi esplicativi. Si comincia con il problema di primo grado ma, come ho detto, restringerò la considerazione al rimanente che si estende dalla dolicesima riga del v. sino a tutto il r.. Avverto subito che la equazione, anzichè con le attuali notazioni tachigrafiche, viene espressa, nel codice, con la sua descrizione ed in questa «numero» indica una quantità nota (c), «chosa» sta per incognita (x), «cienso» ne è il quadrato (x^2) e che, nel trattare di operazioni, l'ignoto scrittore non usa specificare i coefficienti di «chose» (bx) e di «ciensi» (ax^2); infine. le quantità a , b e c predette sono da ritenersi sempre positive.

Leggiamo, allora, la prima regola:

Quando gli ciensi sono uguali al numero, si vuole partire lo numero nelli ciensi e la radice di quello che nne viene si vale la chosa.

Essa, per il caso di $ax^2 = c$, ci indica la soluzione $x = \sqrt{c/a}$ giacchè «radicie» significa radice quadrata. Vediamone ora l'esempio:

Trovami uno numero che, trattone il 1/3 e 'l 1/4 e [il] rimanente multiprichato per se medesimo, faccia 12. Porrai che quello numero fusse

una chosa, [trattone] il $1/3$ e l' $1/4$ rimane $5/12$ di chosa; ora multipricho $5/12$ di chosa via $5/12$ di chosa, fanno $25/144$ di cienso. Abbiamo che $25/144$ di cienso sono uguali a 12. Dei partire 12 per $25/144$ di cienso, viene 69 e $3/25$. Abbiamo che vale la chosa radicie di 69 e $3/25$ e noi ponemmo che quello numero fusse 1 chosa, dunque è quello numero radicie di 69 e $3/25$.

La seconda regola, per il caso $ax^2 = bx$, dà la soluzione $x = b/a$; e qui vale osservare quanto sia giusto chiamar « numero » il quoziente indicato. Vediamone l'enunciato e la sua applicazione:

Quando gli ciensi sono eguali alle chose, si vuole partire le chose per li ciensi e quello che nne viene si è numero e tanto vale la chosa.

Truovami due numeri che tale parte sia l'uno dell'altro chome 2 di 3 e multiprichato l'uno contra l'altro faccia tanto quanto raggiunti insieme. Poni che l'uno sia due chosa e l'altro 3 chose, multipricha due chose via 3 chose, fanno 6 ciensi e poi raggiungi 2 chose [e] 3 chose, fanno 5 chose. Abbiamo che 6 ciensi sono eguali a 5 chose. Dei partire le chose per li ciensi, cioè 5 per 6, viene $5/6$, abbiamo che vale la chosa $5/6$. E noi ponemmo che l'una fusse due chose e l'altra 3 chose, dunque è l'uno 1 e $2/3$ e l'altro 2 e $[1/2]$ e chotanto sarà per parte.

La regola successiva è per la $ax^2 + bx = c$ che, ridotta alla forma $x^2 + 2 \frac{b}{2a} x = c/a$, risolve con la sola

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a};$$

infatti:

Quando gli ciensi e lle chose sono eguali allo numero, si vuol partire ne' ciensi e poi dimezzare le chose e multiprichare per se medesimo e giungniere suso allo numero; e lla radicie della somma meno lo dimezzamento delle chose verrà la chosa.

Per la lettura dell'esercizio che ne segue, varrà ricordare alcune cose: nei prestiti, si dice « fare chapo d'anno » quando all'inizio dell'anno successivo si fa la capitalizzazione degli interessi, la libra (Lb.) si compone di 20 soldi (s.) di 12 danari (d.) e la « ragione » è fissata solitamente in danari per libra al mese. Ne illustro adesso lo svolgimento. Se la ragione è $x/d.$, la Lb. in un anno rende $12x$ d. ovvero $1/20 x$ Lb.; onde 20 Lb. frutteranno x Lb. e, al termine del primo anno, fra capitale ed interessi, avremo Lb. $(20 + x)$. Questa somma, al termine del secondo anno, avrà fruttato Lb. $1/20 x(20 + x)$ e il montante sarà allora $20 + 2x + 1/20 x^2$ cioè « Lb. 20 e 2 chose e $1/20$ di cienso ». Eguagliando a 30 Lb. e « ristorando », cioè riducendo, si perviene alla equazione che si risolve secondo la regola. Il testo dice così:

Uno presta a un altro Lb. 20 in due anni a fare chapo d'anno quando viene in chapo de' 2 anni e quegli li diè Lb. 30. Adomando a che ragione fue prestata la Lb. il mese. Poni che fusse prestata a una chosa, l'anno vale 12 chose per le 12 chose piglia il $\frac{1}{20}$ di Lb. 20 ch'è una chosa, ài Lb. 20 e 1 chosa; ài a meritare Lb. 20 e 1 chosa per un altro anno che vale Lb. 12 chose piglia il $\frac{1}{20}$ di Lb. 20 e 1 chosa ch'è 1 chosa e $\frac{1}{20}$ di cienso, giungni chon Lb. 20 e 1 chosa fanno Lb. 20 e 2 chose e $\frac{1}{20}$ di cienso e noi vogliamo faccia 30, dunque è uguale Lb. 20 e 2 chose e $\frac{1}{20}$ di cienso a 30. Ristora le parti che n'è 20 di ciaschuna parte, rimane che 2 chose e $\frac{1}{20}$ di cienso sono uguali a 10. Ora si vuole partire ogni chosa ne' ciensi, cioè in $\frac{1}{20}$ e verà che 1 cienso e 40 chose sono eguali a 200 numeri. Dimezza le chose, che sono 40, vienne 20, multipricha per se medesimo fanno 400, giungni sopra 200, eccho 600; e lla radicie di 600 meno lo dimezzamento delle chose vale la chosa. E noi ponemo che fusse prestata la Lb. a 1 chosa, adunque fue prestata a ragione di radicie di 600 d. meno d. 20.

Viene ora la regola per il caso $bx = ax^2 + c$; riducendo alla forma $2 \frac{b}{2a} x = x^2 + c/a$, vengono date le due soluzioni

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{2a}} + \frac{b}{2a} \quad \frac{b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{2a}}$$

così:

Quando le chose sono eguali a' ciensi e al numero, si vuole partire ne' ciensi e dimezzare le chose e multiprichare per se medesimo e chavare lo numero; e lla radicie de' rimanente e più il dimezzamento delle chose vale la chosa, ovvero il dimezzamento delle chose meno radicie de' rimanente. E tali ragioni veranno per l'uno modo e quando per l'altro, e tali verranno per l'uno e per l'altro

Segue l'esercizio:

Egli è uno che fae due viaggi. Al primo viaggio guadagna 12 e al seghondo guadagna a quella medesima ragione e al di sezzo ed e' si truova 64. Adomando chon qua[n]ti si mosse. Poni si movesse chon una chosa, guadagna 12, ecco 1 chosa e 12 e al seghondo guadagna a questa medesima ragione che d'una chosa fae una chosa e 12; che farae d'una chosa e 12 a quella medesima ragione? Multipricha una chosa e 12 via 1 chosa e 12 fanno uno cienso e 24 chose e 144 [numeri] a partire per una chosa denne venire 64 chose. E però multipricha 64 via 1 chosa fanno 64 chose. Abbiamo che 64 chose sono eguali a 1 cienso e 24 chose e a 144 numeri. Ora ristora le parti, trai 24 di ciascuna parte, rimane 40 chose sono eguali a 1 cienso e a 144 numeri. Ora parti ne' ciensi, cioè per uno verrà simigliante che 1 cienso e 144 numeri sono eguali [a] 40 chose. Ora

dimezza le cose che nne viene 20, multipricha per se medesimo, fa 400, traine 144 rimane 256 tone la sua radicie ch'è 16 e giugnola al dimezzamento delle cose che sono 20 e ài 36. Abbiamo che vale la cosa 36 e noi ponemo si movesse cho' una chosa, dunque si mosse chon 36. Overo la radicie di quello rimanente chon 16 tralo dal dimezzamento delle cose, cioè di 20, rimane 4 e 4 si può dire che ssi movesse. E sta bene per l'uno modo e per l'altro.

E con ciò è finita la parte dedicata ai problemi di secondo grado; segue ora il ragionare di casi particolari dei gradi superiori ma senza porvisi gli esercizi di esempio; così:

Queste sono 6 reghole dell'aligbra amichabile e per questi 6 modi quaci tutte le ragioni s'asolvono a chi sa indugiare la sua ragione a questi modi; ma sono anchora altre reghole di chubi e de' ciensi le quali rade volte bisogniano imperochè ogni ragione si puote indugiare ad alchuno di questi 6 modi. Ma nondimeno io telle porrò quella senza gli asenpri acciò sepure ti bisognasseno che tu le sappi.

Quando gli chubi sono eguali allo numero, si vuole partire lo numero ne' chubi e lla radicie chubicha di quello che nne viene vale la chosa.

Quando li chubi sono eguali alle cose, si vuole partire ne' chubi e lla radicie di quello che nne viene vale la chosa.

Quando li chubi sono eguali a' ciensi, si vuole partire li ciensi per li chubi e quello che nne viene si è per numero e tanto vale la chosa.

Quando li chubi [e li ciensi] sono eguali alle cose, si vuole partire ne' chubi e poi dimezzare li ciensi e multiprichare per se medesimo e ponere sopra le cose; e lla radicie della somma meno lo dimezzamento delli [ciensi] vale la chosa.

Quando li ciensi sono eguali alli chubi e alle cose, si vuole partire ne' chubi e poi dimezzare li ciensi e multiprichare per se medesimo e echavarne la chosa; e lla radicie dello rimanente più il dimezzamento delle cose [anzi ciensi] vale la chosa. Overo lo dimezzamento de' ciensi meno la radicie dello rimanente vale la chosa. Chè tali ragioni verranno per l'uno e tal per l'altro.

Quando li chubi sono eguali [a' ciensi e alle] cose, si vuole partire ne' chubi e poi dimezzare i ciensi e multiprichare per se medesimo e agugnare sopra alle cose; e lla radicie della somma più il dimezzamento de' ciensi vale la chosa.

Quando gli ciensi de' ciensi sono eguali allo numero, si vuole partire el numero per li ciensi de' ciensi; e lla radicie della radicie di quello che nne viene vale la chosa.

Prima di concludere, intendo fare queste due osservazioni. La prima è che, nel caso di equazione cubica riducibile al secondo grado, sono contemplati tre casi anzichè due come nella trattazione del secondo grado; allora è ovvio come venisse risolto il caso di

equazione quadratica corrispondente alla equazione cubica che, in più, è qui considerata. L'altra osservazione è che il nostro autore scarta sistematicamente la considerazione di radici negative.

* * *

Reputo di non aver fatto cosa sgradita riferendo i procedimenti nella dizione originale; ma debbo avvertire, e con ciò concludo, che ho provveduto a rivedere la composizione delle parole, ad introdurre apostrofi ed accenti sempre mancanti (ho usato l'accento in luogo della h mancante per le forme del verbo avere dove si richiede) e a disporre di una punteggiatura, pur essa mancante, al fine di rendere più facile la comprensione del testo: in parentesi quadra ho messo parole ovviamente dimenticate.

APPENDICE

Tu àj veduto quanto ò parlato sopra la prima posisione, ora intendo di parlare dela reghola del chatuino volgharmente le due posizioni. E nota che tutte le ragioni che venghono per la prima posisione, venghono tutte ben fatte per le due posizioni; ma molte ragioni venghono per le due posizioni che non venghono bene per la prima posisione.

* Uno fa tre viaggi: al primo viaggio guadangna 20 per 100 e spende 12 d. al secondo viaggio fa, di 3, 5 e spende 17 d., al terzo viaggio radoppia i suo' danari e spende 20 e poi non si truova niente. Adomando chon quanti d. si mosse. De[e]si chosì fare. Pongniamo che si movesse chon 30 d., noi diciamo ch'al primo viaggio à guadangnato 20 per 100 cioè guadangna il $\frac{1}{5}$; guadagnierebbe 6 d. e 30 n'à da sè, arebene 36 d.. Noi diciamo che di questi 36 d. ne spende 12, avanzagliene 24: abbiamo che, fatto il primo viaggio, gli avanza 24 d.. Ora diciamo ch'al sechondo viaggio e' fa, di 3, 5, di' chosì: se di 3 io fo 5 che farà 24? Múltipricha 5 via 24 fa 120 e parti in 3 vienne 40. Ora diciamo che di questi 40 d. ne spende 17 d.: ch'ava 17 d. di 40 d. rimane 23 d.; abbiamo che, fatto il sechondo viaggio, gli avanza 23 d.. Ora diciamo ch'al $\frac{1}{3}$ viaggio radoppia i suoi d. adunque radoppia 23 d. farebono 46 d. e di questi 46 diciamo ne spende 20 d., ch'ava 20 d. di 46, rimane 26 d.: adunque, fatto il terzo viaggio, gli avanza 26 d. E noi diciamo che non gli avanza nulla, adunque diremo chosì: per 30 ch'io mi puosi, mi viene più 26. Ora fa' un'altra posisione e pongniamo che si movesse chon 25 d.: noi diciamo eh'al primo viaggio guadangnia 20 per 100, ch' guadangnia 20 per 100 guadangnia il $\frac{1}{5}$, adunque di 25 d. guadangnierebe 5 d., arebene poi 30 d. e noi diciamo che ne spende 12 d., triai 12 di 30 d. rimane 18 d. abbiamo che, fatto il

primo viaggio, gli avanza 18 d. Ora il secondo viaggio diciamo fa, di 3 d., 5; adunque se fa, di 3, 5 che farà di 18? Multiplicha 5 via 18, fa 90, e parti in 3, viene 30 d.. Diciamo di questi 30 d. ne spende 17 d., chava 17 di 30, rimane 13 d.. Ora diciamo ch'al $1/3$ viaggio radoppia i suoi d., adunque radopiando 13 d. fa 26 d., diciamo ne spende 20, avanzagliene 6 d.. E noi diciamo che, fatto il terzo viaggio, non gli avanza nulla, adunque diremo chosi: per 25 ch'io mi puosi, mi viene più 6 Tu avesti la prima posisione, per 30, più 26 e ora ài la sechonda posisione. per 25, più 6. Dicie la reghola: quando fai 2 posisione che vengnino tramendue più e più debi chavare l'uno più del'altro e quello rimane è 'l partitore e poi multipricha le dette posisione in crocie e chava l'una multiprichazione del'altra e quello che rimane si vole parture per quello che rimase chavato l'uno più del'altro e quello ne viene sarà l'efetto di quello domandi. Adunque, seguendo questo, chava 6 di 26, rimane 20 e questo si è il partitore; ora multipricha 25 via 26, fa 650, e 6 via 180 fa 180; trai 180 da 650, rimane 470. Ora parti 470 in 20, viene 23 $1/2$ e chon 23 d. $1/2$ si mosse.

per 30 più 26 650

Trai 180 di 650 resta 470

per 25 più 5 180

parti per 20 vienne 23 $1/2$

Trai 6 di 26 resta 20

Nota. Quando fai ragione alcuna per le due posizioni, quando ài fatto amendue le dette posizioni, dichò che se tramendue vengono più e più, dichò che debi chavare l'uno più del'altro e quello che rimane si è il partitore; e poi multipricha le dette posisione in crocie e quello che fa chava l'una multiprichazione del'altra e quello che resta parti in quello che rimase, e quello ne viene sarà l'afetto di quello domandi. E se amendue le dette multiprichazioni [anzi posizioni] venisseno meno e meno debi tenere que' medesimi modi che tenesti quando ti vennano più e più. E se l'una posisione ti venisse l'una più e l'altra meno dichò che debi raggiugnere insieme quel più e quello meno e quello che fa è 'l partitore. Poi multipricha le dette posisione in crocie e quello che fa raggiugni insieme le dette multiprichazioni e quello che fa de' parture in quello che s'è raggiunto insieme, il più e 'l meno, e quello ne viene sarà l'efetto di quello domandi.

Abbiamo più e più: trai l'uno del'altro. E meno e meno: trai l'uno del'altro. E meno e più: raggiugni insieme.

** 2 homini anno danari. Dicie il primo al sechondo: se tu mmi dessi il $1/3$ de' tuoi d. chon que' ch'io i' ò arei 20 d.. Dicie il sechondo al primo: se tu mmi dessi il $1/5$ de' tuoi d. io n'arei 27. Adomando qu' sti d. avea ciaschuno per sè solo. De[e]si chosì fare. Pongniamo che 'l primo avesse 15 d. ed e' si vanta d'avere 20 d., manchagli 5 e questi 5 . se

dal sechondo, cioè il $\frac{1}{3}$ de' suoi d.. Adunque al sechondo chonviene avere tanti d. che 'l $\frac{1}{3}$ sia 5 d., adunque gli chonviene avere 15 d.. Abbiamo achordato il primo chol sechondo, cioè che 'l primo à 15 e 'l sechondo à 15. Ora ci resta achordare il sechondo chol primo. Noi diciamo che 'l sechondo vole il $\frac{1}{5}$ de' d. del primo, arebene 3, e 15 n'a 'l sechondo da se medesimo, arebene 18. E tu vedi che si vantò d'averne 27, adunque gli mancherebe 9 d.. Diremo chosì: per 15 ch'io mi puosi, mi viene meno 9. Ora debbi fare la sechonda posisione e diremo chosì: pongniamo che 'l primo avesse 10. Se 'l primo avesse 10 e si vanta d'avere 20, manchagli 10 d. e questi 10 d. vole dal sechondo, cioè il $\frac{1}{3}$ de' suoi d.. Adunque al sechondo chonviene avere tanti d. che 'l $\frac{1}{3}$ sia 10, adunque gli chonviene avere 30 d.. Ora chiede il sechondo al primo il $\frac{1}{5}$ de' suoi d., farebono 2 d. e 30 n'a da se, arebene 32 d. ed e' si vanta d'avere 27 d., adunque glien'avanzerebe 5. Adunque diremo chosì: per 10 ch'io mi puosi, mi viene più 5. Noi abbiamo la prima posisione, fu per 15 meno 9, e la sechonda posisione, fu per 10 più 5. Sechondo che dicie la reghola dobbiamo raggiugnere il più e 'l meno, cioè 9 e 5, fa 14 e questo è 'l partitore. Ora debbi multiprichare le posisioni insieme, cioè in crocie; 10 via 9 fa 90 e 5 via 15 fa 75; ora giugni insieme 90 e 75, fa 165 e questo dobbiamo partire in 14, viene 11 e $\frac{11}{14}$ e chotanto àne il primo homo. Ed e' si vanta d'avere 20, manchagli $8\frac{3}{14}$ e questi $8\frac{3}{14}$ vole de' d. del sechondo; adunque al sechondo chonviene avere tanti d. che 'l $\frac{1}{3}$ sia $8\frac{3}{14}$, adunque il sechondo chonviene ch'abia $24\frac{9}{14}$. Abbiamo: il primo homo à per se medesimo 11 d. $\frac{11}{14}$ e 'l sechondo à 24 d. $\frac{9}{14}$.

*** 3 homini anno danari. Dicie il primo al sechondo: se tu mmi dessi il $\frac{1}{2}$ de' tuoi d., chon que' ch'io ò io arei 20. Dicie il sechondo al $\frac{1}{3}$: se tu mmi dessi il $\frac{1}{3}$ de' tuoi d., chon que' ch'i' ò, io arei 25. Dicie il terzo al primo: se tu mmi dessi il $\frac{1}{5}$ de' tuoi d., chon que' ch'i' ò io arei 33. Adomando quanto avea ciaschuno per se medesimo. De[e]si chosì fare. Pongniamo che 'l primo avesse 15, e se 'l primo avesse 15 ed e' si vanta d'avere 20, manchagli 5 e questi 5 vole dal sechondo chonpangnio de' d. suoi. Adunque al sechondo chonpangnio chonviene avere tanti d. che 'l $\frac{1}{2}$ si è 5, adunque gli chonviene avere 10. E 'l sechondo à 10 ed e' si vanta d'avere 25, manchagli 15 e questi 15 vole dal $\frac{1}{3}$ de' d. del detto terzo. Adunque al terzo chonviene avere tanti d. che 'l $\frac{1}{3}$ sia 15, adunque gli chonviene avere 45. Abbiamo: il primo à 15, il sechondo à 10, il terzo à 45. Ed è achordato il primo chol secondo e 'l sechondo chol terzo, ora ci resta ad achordare il $\frac{1}{3}$ chol primo. Dicie il $\frac{1}{3}$ che vuole il $\frac{1}{5}$ de' d. del primo, noi diciamo che il primo à 15; il $\frac{1}{5}$ si è 3 e 45 n'a da se, il terzo adunque, chon l'aiuto del primo, arebe 48. E tu vedi che si vanta d'avere 33, adunque arebe più 15 che non vogliamo e però faremo chosì: per 15 ch'io mi puosi, mi viene più 15. Ora dobbiamo fare la sechonda posisione; pongniamo che 'l primo avesse 10 e noi diciamo: si vanta d'avere 20. Manchagli 10 e questi 10 vole il $\frac{1}{2}$ de' d. del sechondo; adunque al sechondo chonviene avere tanti d. che la metà sia 10, adunque gli chonviene avere 20. E se 'l sechondo avesse 20 ed e' si vanta d'avere

25, manchagli 5 e questi 5 vole dal $\frac{1}{3}$, c'òè il $\frac{1}{3}$ de' suoi d.. Adunque al terzo chonviene avere tanti d. ch' 'l $\frac{1}{3}$ si è 5, adunque gli chonviene avere 15. E abbiamo achordato lo primo chol sechondo e achordato il sechondo chol $\frac{1}{3}$, ora ci resta ad achordare lo $\frac{1}{3}$ chol primo. Noi diciamo che 'l $\frac{1}{3}$ à 15 ed e' vole il $\frac{1}{5}$ de' d. del primo; il primo à 10, il $\frac{1}{5}$ di 10 sono 2, adunque arebe dal primo 2, e 15 n' à da sè, sicchè n' arebe 17; ed e' si vanta d'averne 33, manchagliene 16. Tu vedi, noi abbiamo chondotto la ragione in 2 posisioni; la prima posisione si è: per 15, più 15; la sechonda posisione si è: per 10, meno 16. Ora seghui la reghola: meno e più, raggiungi insieme. Cioè 16 e 15 fa 31 e questo si è il partitore. Debbi multiprichare le dette posisioni insieme, cioè in crocie: 10 via 15 fa 150 e 15 via 16 fa 240. Ora giungi insieme 150 e 240, fa 390 e questo 390 dobbiamo partire in 31; vienne 12 $\frac{18}{31}$ e tanto arane il primo Ora per vedere quello ch'arane il sechondo noi diciamo che 'l primo à 12 $\frac{18}{31}$ ed e' si vanta d'averne 20, manchagli 7 $\frac{13}{31}$ e questi 7 $\frac{13}{31}$ vole dela metà del sechondo; adunque al sechondo chonviene avere tanto che la metà sia 7 $\frac{13}{31}$, chonviagli avere 14 e $\frac{26}{31}$ e tanto arà il sechondo. Ora per vedere quello ch'arane il $\frac{1}{3}$ noi diciamo che 'l sechondo à 14 $\frac{26}{31}$ ed e' si vanta d'averne 25, manchagli 10 $\frac{5}{31}$ gli domanda al terzo, cioè il $\frac{1}{3}$ de' suoi d.: adunque al $\frac{1}{3}$ chonviene avere tanti d. che 'l $\frac{1}{3}$ sia 10 $\frac{5}{31}$, adunque gli chonviene avere 30 $\frac{10}{31}$ e tanto arà il $\frac{1}{3}$ chompanigno.

prima	per 15	più	15	150	150 e 240
sechondo	per 10	meno	16	240	fa 390 parti per 31
					12 $\frac{18}{31}$
			15 e 16	fa 31	

Abbiamo: il primo homo à 12 $\frac{18}{31}$, il sechondo homo à 14 $\frac{26}{31}$ e 'l terzo homo à 30 $\frac{15}{31}$. E a punto viene.

Tu ài veduto qui da lato ch'io t'ò dato asempro in 2 homini e poi seguente di tre homini e per quello modo, non eusciendo d'una medesima forma, potrei fare di 100 homini seghuitando il modo vedi t'ò mostratò per le dette due ragioni.

** 2 homini hanno danari. Dicie il primo al sechondo: se tu mmi dessi 12 de' tuo' d., chon que' ch'i' ò, io arei 3 chotanti di te. Dicie il sechondo al primo: se tu mmi dessi 17 de' tuoi d., chon que' ch'i' ò, io arei 3 chotanti di te. Adomando quando avea ciaschuno per se medesimo. De[e]si chosì fare. Pongniamo che 'l primo avesse 30, dicie ne vole 12 dal sechondo; adunque n' arebe 42 ed e' si vanta d'averne 2 chotanti che 'l sechondo, adunque al sechondo chonviene avere 21 e 12 che ne dà al primo, adunque, in tutto gli chonviene avere 33. Abbiamo che 'l primo à 30 e 'l sechondo à 33. Ora chiede il sechondo al primo 17 de' suoi d., adunque il sechondo arebe 50 e al primo n'avanza 13. Noi diciamo: il sechondo si

vanta d'avere 3 chontanti che 'l primo. Adunque al sechondo bisognerebe d'avere 39 e tu vedi ch'egli à 50, adunque egli à 11 più che non bisongna. Diremo chosì per la prima posisione: per 30, più 11. Ora chonviene fare per la sechonda posisione. Pongniamo che 'l primo avesse 36, domandane 12 al sechondo, adunque n'arebe 48. Vantasi d'avere 2 chotanti che 'l sechondo, adunque al sechondo chonviene avere 24 e 12 ne dà al primo, adunque gli chonviene avere in tutto 36. Abbiamo che 'l primo à 36 e 'l sechondo à 36. Ora chiede il sechondo al primo 17 de' suoi d., al primo n'avanza 19, il sechondo n'arà 53. E 'l sechondo si vanta d'avere 3 chotanti che 'l primo, adunque al sechondo bisongna d'avere 57; e noi diciamo ch'egli à 53, manchagli 4. Adunque diremo per la sechonda posisione: per 36, meno 4. Tu vedi che la prima posisione fu: per 30, più 11; e la sechonda è: per 36, meno 4. Ora seghui la reghola: meno e più ragiungni insieme. 11 e 4 fa 15 e questo si è il partitore. Ora debbi multprichare le posizioni insieme in croce, cioè 36 via 11 fa 396 e 30 via 4 fa 120. Ora giungni insieme 36 e 120, fa 516 e questo debbi partire in 15. Vienn 34 $\frac{2}{5}$ e chotan[t]o arà il primo homo Ora per vedete quello ch'arà il sechondo homo noi diciamo: il primo à 34 $\frac{2}{5}$ e chiedene 12 al sechondo, adunque n'arebe 46 $\frac{2}{5}$; vantasi d'avere 2 chontanti che 'l sechondo, adunque il sechondo aspetta d'avere 23 $\frac{1}{5}$ e 12 ne dà al primo, adunque gli chonviene avere 35 $\frac{1}{5}$. Abbiamo; il primo à 34 $\frac{2}{5}$ e 'l sechondo 35 $\frac{1}{5}$.

per 30 più 11 396 $\swarrow \quad \searrow$ per 36 meno 4 120 11 e 4 fa 15	11 via 36 fa 396 4 via 30 fa 120 516 parti per 15 34 $\frac{2}{5}$
--	---

*** 3 homini àno d.. Dicie il primo al sechondo: se tu mmi dessi 15 de tuoi d., con que' ch'i' ò, io arei 2 chotanti di te. Dicie il sechondo al 1/3: se tu mmi dessi 18 de' tuoi d., chon quelli ch'i' ò, io arei 3 chotanti di te. Dicie il 1/3 al primo: se tu mmi dessi 21 de' tuoi d., chon quelli ch'i' ò, io arei 5 chotanti di te. Adomando quanto avea ciaschuno per se medesimo. De[se]si chosì fare. Pongniamo che 'l primo avesse 27, e se 'l primo avesse 27, chon 15 ne vole dal sechondo, arebene 42 e vanta d'avere 2 chotanti che 'l sechondo; adunque al sechondo bisongna d'avere 21, e 15 ne chonviene dare al primo, sicchè gliene bisongna 36, al sechondo. Ora vegiamo, se 'l sechondo à 36 e 18 ne vole dal 1/3 adunque n'arebe 54 e vantasi d'avere 3 chotanti che 'l terzo, al 1/3 chonviene avere 18, e 18 ne chonviene dare al sechondo, sicchè in tutto gli bisongna avere 36. Ora abbiamo achordato il primo chol sechondo e 'l sechondo chol terzo, ora ci resta ad achordare il terzo chol primo. Il 1/3 chiede 21 al primo, se 'l primo dà 21 al terzo il 1/3 n'arà 57 e al primo rimane 6. E noi diciamo che 'l 1/3 si vanta d'avere 5 chotanti che 'l primo, adunque

al $\frac{1}{3}$ bisongnia d'avere 30 e tu vedi ch'egli à 57, adunque il terzo à 27 più che non gli bisongnia. Adunque diremo chosì per la prima posisione: per 27 ch'io mi puosi, mi viene più 27. Ora dobbiamo fare per la sechonda posisione e diremo chosì Pongniamo che 'l primo avesse 33, e 15 ne vole dal sechondo, arebe 48 e' si vanta d'avere 2 chotanti che 'l sechondo. Adunque al sechondo bisongnierebe d'avere 24, e 15 ne dà al primo, adunque gli bisongnia in tutto 39. Se il sechondo n' à 39, chon 15 che ne chiede al $\frac{1}{3}$, arebene in tutto 57 ed e' si vanta d'avere 3 chotanti che 'l $\frac{1}{3}$. Adunque al terzo bisongnia d'avere 19, e 18 ne dà al sechondo, adun[que] in tutto bisongnia avere, al $\frac{1}{3}$, 37. Or'ài achordato lo primo chol sechondo e le sechondo chol $\frac{1}{3}$, ora ti bisongnia d'achordare lo $\frac{1}{3}$ chol primo. Il terzo chiede al primo 21 de' suoi d. e se 'l primo glie[li] desse, al primo ne rimarebe 12 e 'l terzo n'arebe 58. E noi diciamo che 'l $\frac{1}{3}$ si vanta d'avere 5 chotanti che 'l primo, adunque al $\frac{1}{3}$ bisongnia d'avere 60 e noi diciamo ch'egli à 58; adunque gli manca 2. Adunque diremo per la sechonda posisione per 33, meno 2. Tu ài per la prima posisione: per 27 più 27. E per la sechonda posisione ài: per 33, meno 2. E sechondo la reghola dobbiamo raggiungiare il più e 'l meno, cioè 27 più e 2 meno fa 29 e questo si è il partitore. Ora debbi multiplicare la posisione in crocie, cioè 33 via 27 fa 821 e 27 via 2 fa 54. Ora debbi giungiare insieme 891 e 54, fa 945, e questo debi partire in 29. Vienne 32 $\frac{17}{29}$ e tanto viene a 'vere il primo. Ora per vedere quello arane il sechondo, noi diciamo che 'l primo à 32 $\frac{17}{29}$, e chon 15 gliene dà il sechondo, arebe 47 $\frac{17}{29}$. E tu di': si vanta d'avere 2 chotanti che 'l sechondo. Adunque al sechondo viene a 'vere 23 $\frac{23}{29}$, e 15 ne dà al primo, adunque gli bisongnia 38 $\frac{23}{29}$ e tanto arà il sechondo. Ora vegiamo quello arà il terzo homo; noi diciamo che 'l secondo à 38 $\frac{23}{29}$, chon 18 ne domanda al $\frac{1}{3}$, arebe 56 $\frac{23}{29}$ e noi diciamo: si vanta d'avere 3 chotanti che 'l terzo. Aunque al $\frac{1}{3}$ bisongnia 18 $\frac{27}{29}$, e 18 ne dà al sechondo, adunque in tutto bisongnia ch'abia 36 $\frac{27}{29}$ e tanto arà il $\frac{1}{3}$ homo. Abiamo: il primo à 32 $\frac{17}{29}$ e 'l sechondo 38 $\frac{23}{29}$ e 'l terzo 36 $\frac{27}{29}$.

per 27	più	27	891	
	\			fa 945
	/			
per 33	meno	2	54	
	27 e 2	fa 29		parti per 29 32 $\frac{17}{29}$

Dela parte delle 2 posizioni, o vogliamo dire reghola di chatuina, mi pare avere parlato a sufficienza benchè molte ragioni si potrebbero fare e porre per esemplo; ma questo ch'è scritto mi paiono sufficienti a ogni altra ragione la quale bisogniasse condurre per le 2 posizioni. E se alchuno dicesses: le due che fai potrebesi fare altre posizioni? Dicho chosì che potresti fare ogni posisione che volessi, ma sempre guarda di fare posizioni senza rotti acciò che la ragione sia più breve e più intendente.