Bollettino
Unione Matematica Italiana

Fulvia Skof

Sull'andamento delle somme parziali delle serie di potenze con integrale assolutamente convergente.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.4, p. 405–419.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_4_405_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

Sull'andamento delle somme parziali delle serie di potenze con integrale assolutamente convergente.

Nota di Fulvia Skof (a Milano) (*) (**)

Sunto. - *In questa Nota si prendono in esame le serie di potenze aventi integrale assolutamente convergente per* $|z| \leqq 1$, *e che si mantengono limitate su un insieme di raggi del cerchio stesso; seguendo l'ordine di idee di* L. Fejér *si dà una maggiorazione del modulo della somma parziale all'estremo di un tale raggio. L'espressione maggiorante viene analizzata in base a ipotesi sull'andamento della successione dei moduli dei coefficienti.*

1. Introduzione.

Sia $f(z) = \sum\limits_0^\infty a_k z^k$ convergente per $|z| < 1$ e poniamo

$$f_n(z) = \sum_0^n a_k z^k, \qquad F(z) = \int_0^z f(t)\,dt = \sum_0^\infty \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}.$$

Fissiamo l'attenzione sulle seguenti classi:

($\mathfrak{A}_1$) è la classe delle serie $f(z)$ il cui integrale $F(z)$ è assolutamente convergente per $|z| \leqq 1$, cioè $\sum\limits_0^\infty |a_k|/(k+1)$ convergente;

(M_1) è la classe delle $f(z)$ aventi modulo medio limitato, cioè

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\,d\theta \leqq K(f) \quad \text{per} \quad 0 \leqq r < 1;$$

($\mathfrak{C}$) è la classe delle $f(z)$ per le quali esiste finito il limite radiale

$$\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}) = g(\theta) = g(f;\ \theta) \tag{1.1}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 13 settembre 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca N. 40 (1962-'63) del Comitato nazionale per la Matematica del C. N. R.

uniformemente rispetto a θ, $0 \leqq \theta < 2\pi$. [$g(\theta)$ risulta funzione continua dell'argomento θ. Convenendo di porre $f(e^{i\theta}) = g(\theta)$, $f(z)$ risulta continua per $|z| \leqq 1$; inversamente, se $f(z)$ è continua, con quella convenzione, per $|z| \leqq 1$, allora vale (1.1)].

È noto che $(M_1) \subseteq (\mathfrak{A}_1)$ (G. H. HARDY - J. E. LITTLEWOOD, [3], p. 208).

Sono noti anche i seguenti risultati:

1°) Esistono $f(z) \in (\mathfrak{C})$ le cui serie divergono in insiemi ovunque densi su $|z| = 1$ (L. FEJER, [2]).

2°) Fissata $\psi(t)$, con $\psi(t) \longrightarrow +\infty$ per $t \longrightarrow +\infty$ (lentamente quanto si vuole) esistono $f(z) \in (\mathfrak{C})$ tali che sia

$$|a_k| \leqq \psi(k)/k, \qquad \sum_0^\infty a_k \text{ divergente}$$

(P. TURAN, [10]).

3°) D'altronde un risultato classico assicura che

$$f(r) \longrightarrow A \text{ finito e } ka_k > -C \Rightarrow \sum_0^\infty a_k = A$$

(A. TAUBER; G. H. HARDY - J. E. LITTLEWOOD [4]).

4°) $f(z) \in (\mathfrak{C}) \Rightarrow |f_n(1)| = o(\log n)$ (L. FEJÉR - E. C. TITCHMARSH [1]).

5°) $f(z) \in (M_1) \Rightarrow |f_n(1)| \leqq \left(2 \cos \dfrac{n\pi}{2n+1}\right)^{-1} \cdot K(f) \backsim \dfrac{2}{\pi} nK(f)$ (E. EGERVARY [1])

6°) $f(r) = O(1)$, $\sum_0^n ka_k = O(n) \Rightarrow f_n(1) = O(1)$ (O. SZASZ, [8]).

In questa Nota si prendono in esame le serie $f(z) \in (\mathfrak{A}_1)$ che si mantengono limitate lungo qualche raggio $(0, e^{i\theta})$ del cerchio unità, per dare una maggiorazione del modulo della somma parziale all'estremo di un tale raggio.

2. I risultati.

Si perviene ai risultati seguenti:

TEOREMA I. - *Sia Θ un insieme di valori θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ tali che in ciascuno dei raggi $(0, e^{i\theta})$ $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ si mantenga limitata in*

(1) Si veda E. C. TITCHMARSH [9] p. 418.

modulo, e sia $K(\theta)$ *tale che*

$$|f(re^{i\theta})| \leqq K(\theta) \qquad per \quad 0 \leqq r < 1.$$

Allora da $f(z) \in (\mathfrak{A}_1)$ *segue*

$$|f_n(e^{i\theta})| \leqq 2K(\theta) + \left\{ \sum_0^n k |a_k| \cdot \sum_{n+1}^{\infty} |a_k|/k \right\}^{1/2}$$

per $n \geqq n_0 = n_0(f)$ *(indipendente da* $\theta \in \Theta$*).*

Denotiamo con $(\mathfrak{A}_1, \psi)$ la classe delle serie $f(z)$ tali che $f(z) \in (\mathfrak{A}_1)$, $|a_k| \leqq \psi(k)/k$.

Come conseguenza immediata del Teorema I otteniamo il seguente:

TEOREMA II. - *Sia* $\psi(t) > 0$ *definita per* $t \geqq 0$ *e per essa valgano le seguenti proprietà:*

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{n} \psi(k) = O\left(\int_1^{n+1} \psi(t)dt\right) \qquad (b) \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k)/k^2 = O\left(\int_n^{+\infty} (\psi(t)/t^2)dt\right).$$

Sia Θ *un insieme contenuto in* $0 \leqq \theta < 2\pi$. *Da*

$$f(z) \in (\mathfrak{A}_1, \psi), \qquad |f(re^{i\theta})| \leqq K(\theta) \quad per \quad \theta \in \Theta, \qquad 0 \leqq r < 1$$

segue

$$|f_n(e^{i\theta})| \leqq 2K(\theta) + c\Psi(n) \quad per \quad n \geqq n_0(\psi)$$

dove $c = c(\psi)$ *e*

$$\Psi(n) = \left\{ \int_1^{n+1} \psi(t)dt \cdot \int_n^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} dt \right\}^{1/2}$$

Esistono evidentemente funzioni $\psi(t) > 0$ continue, che verificano le due condizioni (a) e (b). Classi di tali funzioni sono le seguenti:

1ª) $\psi(t)$ monotona per $t \geqq t_0$

2ª) $\psi(t)/t \longrightarrow 0+$, $\psi(t)/t$ monotona per $t \geqq t_0$

3ª) $\psi(t)$ a rapporto incrementale limitato per $t \geqq t_0$

4ª) $\psi(t)$ a rapporto incrementale vincolato nel modo seguente:

Esistano tre numeri positivi t_0, H, δ tali che si verifichi la seguente proprietà: in ogni intervallo $k - 1/2 \leqq t \leqq k + 1/2$ (k intero $> t_0$) esiste un punto t_k^* di massimo assoluto di $\psi(t)$ per il quale è verificata la condizione

$$\psi(t) - \psi(t_k^*) \geqq - H \cdot | t - t_k^* | \cdot \psi(t_k^*)$$

in uno almeno dei due intervalli

$$t_k^* - \delta < t \leqq t_k^*, \qquad t_k^* \leqq t < t_k^* + \delta.$$

È evidente che la classe 4ª) comprende come casi particolari tutte le precedenti. Alcuni semplici esempi sono dati dalle seguenti funzioni: $\log t \cdot \operatorname{sen}^{2k} t$ $(k > 0)$, $\log t \cdot \operatorname{sen}^{\tau(t)} t$ $(0 < \tau(t) \longrightarrow +\infty)$, $\log t \cdot \operatorname{sen}^{2k} \sqrt{t}$ $(k > 0)$, $\log t \cdot \operatorname{sen}^{2k} (\log t)$ $(k > 0)$, $(\sqrt{t}/\log t) \operatorname{sen}^{2k} t$ $(k > 0)$.

5ª) $\psi(t)$ «lentamente oscillante», cioè $\psi(t)$ fornita della seguente proprietà: per ogni $c > 0$ è $\psi(ct) \sim \psi(t)$ quando $t \longrightarrow +\infty$.

Vale il seguente

TEOREMA III. - *Nel Teorema* II *in luogo di* $\Psi(\mathrm{n})$ *si può sostituire* $\psi(\mathrm{n})$ *tutte le volte che* $\psi(\mathrm{t}) > 0$ *verifica le tre seguenti condizioni*:

(c) $\psi(t)$ *derivabile*, $\psi'(t) \geqq 0$

(d) $\psi(t)/t$ *monotona*, $\psi(t)/t \longrightarrow 0+$ *per* $t \longrightarrow +\infty$

(e) $\displaystyle\int_x^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt = O\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)$.

In queste ipotesi è $\Psi(\mathrm{n}) \asymp \psi(\mathrm{n})$.

OSSERVAZIONI. 1). - Da (d) seguono (a) e (b); invece (e) non è conseguenza di (c) e (d), come lo mostra il seguente esempio: Si consideri la successione di coppie di numeri positivi (t_n, T_n)

$$t_1 < T_1 < t_2 < T_2 < \dots < t_n < T_n < \dots$$

con

$$t_1 = 1, \qquad t_{n+1} = e(1 + 1/n)^2 t_n, \qquad T_n = e t_n,$$

e la funzione $\psi(t)$ così definita

$$\psi(t) = t/n^2 \quad \text{per} \quad t \in I_n \equiv (t_n \leqq t < T_n)$$
$$\psi(t) = T_n/n^2 = e t_n/n^2 \quad \text{per} \quad T_n \leqq t < t_{n+1},$$

salvo lievi alterazioni nei punti angolosi che assicurino, la derivabilità di $\psi(t)$ per ogni t.

Si vede subito che (c) e (d) sono verificate. Per quanto riguarda (e) supponiamo che sia $t_{\nu-1} < x \leqq t_\nu$: risulta

$$\int_x^\infty \frac{\psi(t)}{t^2} dt \geqq \sum_{n \geqq \nu} \int_{I_n} \frac{\psi(t)}{t^2} dt = \sum_{n \geqq \nu} \int_{I_n} \frac{1}{n^2 t} dt =$$
$$= \sum_{n \geqq \nu} \frac{1}{n^2} \geqq \int_\nu^\infty \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{\nu}$$
$$\psi(x)/x \leqq \psi(t_{\nu-1})/t_{\nu-1} = 1/(\nu - 1)^2$$

e la condizione (e) non è verificata.

2) Il passaggio da $\Psi(n)$ a $\psi(n)$ contemplato nel Teorema III non è sempre possibile, quando si lasci cadere qualcuna delle condizioni ivi segnalate. Sussiste la seguente proprietà:

Se $\psi(t)$ *verifica* (c) *e* (d) *ma non* (e), *allora* $\Psi(n)$ *e* $\psi(n)$ *non hanno lo stesso ordine di grandezza per* $n \to +\infty$.

Infatti, nelle ipotesi (c) e (d) si ha $\int_1^x \psi(t) dt \asymp x\psi(x)$, $\psi(n+1) \sim \sim \psi(n)$, e quindi

$$\Psi(n) \asymp | n\psi(n) |^{1/2} \left\{ \int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t^2} dt \right\}^{1/2};$$

dal fatto che non vale (e) segue l'asserto.

In proposito vale il seguente

TEOREMA IV. - *Esistono funzioni* $\psi(t) > 0$ *continue per le quali valgono le proprietà* (*c*) *e* (*d*) (*e quindi* (*a*) *e* (*b*)) *e risulta*

$$1 = \underline{\lim}\, \Psi(t)/\psi(t) < \overline{\lim}\, \Psi(t)/\psi(t) = +\infty$$

dove

$$\Psi(t) = \left\{ \int_1^{t+1} \psi(u)du \int_t^{\infty} \frac{\psi(u)}{u^2} du \right\}^{1/2}.$$

Sussiste anche il seguente

TEOREMA V. - *Nel Teorema* II *in luogo di* $\Psi(n)$ *si può sostituire* $\psi(n)$ *tutte le volte che* $\psi(t) > 0$ *è una funzione « lentamente oscillante ». Risulta in questo caso,* $\Psi(n) \sim \psi(n)$.

Si osservi che la classe $\mathfrak{F}$ delle funzioni $\psi(t)$ che verificano (*c*)(*d*)(*e*) e la classe $\mathfrak{L}$ delle funzioni « lentamente oscillanti » non sono una contenuta nell'altra.

Infatti, ad esempio, $\psi(t) = t^{\delta}$ $(0 < \delta < 1) \in \mathfrak{F}$ e non ad $\mathfrak{L}$; $\psi(t) = 1 + \mathrm{sen}^2(\pi \log\log x) \sqrt{\log x} \in \mathfrak{L}$ ma non ad $\mathfrak{F}$.

3. Dimostrazione dei Teoremi I e II.

Osserviamo preliminarmente:

a) Se $f(z) \in (\mathfrak{A}_1)$, allora $\sum_1^{\infty} |a_k|/k$ converge e quindi $F(z)$ converge uniformemente per $|z| \leq 1$. In particolare, $|a_k|/k \to 0$.

b) Poniamo

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta), \qquad F(z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta) \qquad (z = re^{i\theta}).$$

Se per $0 \leq r < 1$ è $|f(re^{i\theta})| \leq K(\theta)$, sussiste la seguente catena di disuguaglianze

$$|f(re^{i\theta})| \leq K(\theta) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |u(r, \theta)| \leq K(\theta) \\ |v(r, \theta)| \leq K(\theta) \end{array} \right\} \Rightarrow |f(re^{i\theta})| \leq K(\theta)/\sqrt{2}.$$

Risulta inoltre

$$|F(e^{i\theta})-F(re^{i\theta})|\leqq 2K(\theta)(1-r).$$

Infatti, essendo $U_r'(r,\ \theta)=u(r,\ \theta)$ $V_r'(r,\ \theta)=v(r,\ \theta)$, si ha

$$\begin{aligned}|F(e^{i\theta})-F(re^{i\theta})| &= \big|\,|U(1,\ \theta)-U(r,\ \theta)|+i\,|V(1,\theta)-V(r,\ \theta)|\,\big| = \\ &=(1-r)\,|u(\eta_1 r,\ \theta)+iv(\eta_2 r,\ \theta)| \qquad (0<\eta_h<1)\\ &\leqq 2K(\theta)(1-r).\end{aligned}$$

c) Posto $\zeta=re^{i\theta}$, si consideri $\int_{\zeta}^{e^{i\theta}} f(z)dz$ lungo il raggio; dalla *b*) segue

$$\left|\int_{\zeta}^{e^{i\theta}} f(z)dz\right| = |F(e^{i\theta})-F(\zeta)|\leqq 2K(\theta)(1-r).$$

Per dimostrare il Teorema I, cominciamo col considerare l'espressione

$$\left|\sum_0^n a_k\frac{1-r^{k+1}}{k+1}e^{i\theta k}\right| \qquad (0\leqq r<1,\quad \theta\in\Theta)$$

Essendo $\left|\sum\limits_0^n\right|\leqq\left|\sum\limits_0^\infty\right|+\left|\sum\limits_{n+1}^\infty\right|$, si ha (per la *b*))

$$\left|\sum_0^n a_k\frac{1-r^{k+1}}{k+1}e^{i\theta k}\right|\leqq 2K(\theta)(1-r)+\sum_{n+1}^\infty\frac{|a_k|}{k}$$

da cui segue

$$\left|\sum_0^n a_k\frac{1+r+\ldots+r^k}{k+1}e^{i\theta k}\right|\leqq 2K(\theta)+\frac{1}{1-r}\sum_{n+1}^\infty\frac{|a_k|}{k},$$

e, tenendo conto della relazione

$$|(1+r+\ldots+r^k)/(k+1)-1|<(1-r)k$$

che è valida per $0 < r < 1$, $n \geqq 1$ (²), si ha anche

$$\left| \sum_0^n a_k \frac{1 + r + \dots + r^k}{k+1} e^{i\theta k} - f_n(e^{i\theta}) \right| \leqq (1 - r) \sum_0^n k \mid a_k \mid .$$

pertanto

$$\mid f_n(e^{i\theta}) \mid \leqq \left| \sum_0^n a_k \frac{1 + r + \dots + r^k}{k+1} e^{i\theta k} \right| + (1 - r) \sum_0^n k \mid a_k \mid ,$$

da cui

$$\mid f_n(e^{i\theta}) \mid \leqq 2K(\theta) + \frac{1}{1 - r} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\mid a_k \mid}{k} + (1 - r) \sum_0^n k \mid a_k \mid .$$

Assumiamo ora $r = r_n$, con

$$r_n = 1 - \left\{ \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\mid a_k \mid}{k} \Big/ \sum_0^n k \mid a_k \mid \right\}^{1/2} \qquad (n \geqq n_0(f)).$$

Per a), risulta $r_n \longrightarrow 1 -$ per $n \longrightarrow +\infty$. Si ottiene quindi

$$\mid f_n(e^{i\theta}) \mid \leqq 2K(\theta) + \left\{ \sum_0^n k \mid a_k \mid \cdot \sum_{n+1}^{\infty} \mid a_k \mid / k \right\}^{1/2} \qquad (n \geqq n_0(f))$$

e il Teorema I risulta dimostrato.

Il Teorema II è corollario del Teorema I.

4. Classi di funzioni $\psi(t) > 0$ continue che verificano le ipotesi del Teorema II.

Ci possiamo limitare a dimostrare che le proprietà (a) e (b) del Teorema II sono verificate per le classi 4ª) e 5ª) del n. 2, poiché le classi 1ª), 2ª), 3ª) rientrano come casi particolari nella 4ª) (e d'altronde la verifica diretta è molto semplice).

(²) E. LANDAU [6], p. 57.

Classe 4ª). - Si può supporre δ abbastanza piccolo da avere $0 < \delta < 1/2$, $H\delta < 1$.

A seconda che la condizione per il rapporto incrementale sia verificata in $t_k^* \leqq t < t_k^* + \delta$ oppure in $t_k^* - \delta < t \leqq t_k^*$ $(k > t_0)$ si vede subito che risulta

$$\int_{t_k^*}^{t_k^*+\delta} \psi(t)dt \geqq \delta(1 - H\delta/2)\psi(t_k^*) \quad \text{oppure} \quad \int_{t_k^*-\delta}^{t_k^*} \psi(t)dt \geqq \delta(1 - H\delta/2)\psi(t_k^*),$$

e quindi, tenendo conto che $k - 1 < t_k^* - \delta < t_k^* + \delta < k + 1$ e $\psi(t_k^*) \geqq \psi(k)$ si può garantire che

$$\int_{k-1}^{k+1} \psi(t)dt \geqq \delta(1 - H\delta/2)\psi(t_k^*) \geqq \delta(1 - H\delta/2)\psi(k).$$

Ne segue

$$\psi(k) \leqq C \cdot \int_{k-1}^{k+1} \psi(t)dt \tag{4.1}$$

dove $C = C(H, \delta) = \{\delta(1 - H\delta/2)\}^{-1}$ (indipendente da k).

Sia $n > t_0$. Risulta (tenendo conto di (4.1)):

$$\sum_{k=1}^{n} \psi(k) = \sum_{k \leqq t_0} \dots + \sum_{t_0 < k \leqq n} \dots$$

$$\leqq A(t_0) + C\int_1^{n+1} \psi(t)dt = O\left(\int_1^{n+1} \psi(t)dt\right)$$

e la proprietà (a) è verificata.

Da (4.1) si deduce

$$\frac{\psi(k)}{k^2} \leq \frac{C}{k^2} \int_{k-1}^{k+1} t^2 \cdot \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt \leq C\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \int_{k-1}^{k+1} \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt,$$

e quindi

$$\sum_{k \geq n+1} \frac{\psi(k)}{k^2} \leq C \sum_{k \geq n+1} \left\{ \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \int_{k-1}^{k+1} \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt \right\} \leq$$

$$\leq C\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt = O\left(\int_n^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt\right)$$

e risulta valida anche la proprietà (*b*).

Classe 5ª). - Le funzioni $L(x)$ «lentamente oscillanti» verificano, tra altre notevoli proprietà, le seguenti (8), delle quali alcune garantiscono la validità di (*a*) e (*b*), altre saranno utili nel seguito (n. 7).

Diciamo $\mathfrak{L}$ la classe di tali funzioni.

$$(\alpha)\quad L(x) \in \mathfrak{L} \iff \int_1^x L(u)du \sim xL(x);\quad L(x) > 0 \ \text{ per } \ x \geq x_0(L)$$

$$(\beta)\quad L(x) \in \mathfrak{L} \Longrightarrow \sum_{k \leq n} k^{\tau-1}L(k) \sim \int_1^n u^{\tau-1}L(u)du \sim \frac{n^\tau}{\tau}L(n) \ \text{ per ogni } \ \tau > 0$$

$$(\gamma)\quad L(x) \in \mathfrak{L} \Longrightarrow \sum_{k \geq n} k^{-\tau-1}L(k) \sim \int_n^\infty u^{-\tau-1}L(u)du \sim \frac{n^{-\tau}}{\tau}L(n) \ \text{ per ogni } \ \tau > 0$$

$$(\delta)\quad L(x) \in \mathfrak{L} \Longrightarrow L_1(x) = \int_1^x \frac{L(u)}{u}\, du \in \mathfrak{L}.$$

(8) Per queste ed altre proprietà di tali funzioni, si veda: G. Ricci [7], 299-302; G. H. Hardy - W. W. Rogosinski [5].

Le proprietà (*a*) e (*b*) seguono da (β) e (γ) rispettivamente, quando si sia posto in queste $\tau = 1$.

5. Dimostrazione del Teorema III.

Incominciamo col provare che, nelle ipotesi del teorema, risulta

$$\psi(x) \asymp \frac{1}{x}\int_1^x \psi(t)dt \asymp x\int_x^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}dt. \tag{5.1}$$

Tenendo conto delle condizioni (*c*) e (*d*), si prova facilmente che vale la relazione

$$\frac{x}{2}\psi(x) \leqq \int_0^x \psi(t)dt \leqq x\psi(x),$$

ed è garantita la parte a sinistra di (5.1).

Dimostriamo la validità della relazione

$$\psi(x) \asymp x\int_x^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}dt.$$

Per le ipotesi sull'esistenza e sul segno della derivata $\psi'(t)$, che in virtù di (*c*) e (*d*) è continua per ogni $t > 0$, si ha

$$\frac{\psi(x)}{x} = -\int_x^\infty D\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)dt = \int_x^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}dt - \int_x^\infty \frac{\psi'(t)}{t}dt \leqq \int_x^\infty \frac{\psi(t)}{t^2}dt$$

e dalla (*e*) segue l'asserto.

(5.1) risulta pertanto dimostrata. Ne segue

$$\Psi(n) \asymp \left\{(n+1)\psi(n+1)\cdot\frac{\psi(n)}{n}\right\}^{1/2}$$

da cui, ricordando che per (*c*) e (*d*) è $1 \leqq \psi(n+1)/\psi(n) \leqq (n+1)/n$

e quindi $\psi(n+1) \sim \psi(n)$ per $n \longrightarrow +\infty$, si ottiene

$$\Psi(n) \asymp \psi(n).$$

Il teorema III risulta dimostrato.

6. Costruzione di una $\psi(t)$ che rende valido il Teorema IV.

Osserviamo preliminarmente che nelle ipotesi del teorema risulta valida la parte a sinistra in (5.1), e pertanto confrontare l'ordine di grandezza delle funzioni $\Psi(t)$ e $\psi(t)$ equivale a confrontare quello delle funzioni

$$J(t) = \int_t^\infty \frac{\psi(\psi)}{u^2}\,du, \qquad \frac{\psi(t)}{t}:$$

siamo quindi condotti a studiare l'andamento del rapporto

$$\rho(t) = J(t) : \frac{\psi(t)}{t}.$$

Consideriamo la funzione $\psi(t)$ così definita:

$$\begin{cases} \psi(t) = \psi(\alpha_h) \quad \text{per} \quad \alpha_h < t \leqq \beta_h \\ \psi(t) = \{\psi(\beta_h)/\beta_h\}\, t \quad \text{per} \quad \beta_h < t \leqq \alpha_{h+1} \end{cases}$$

dove le successioni $\{\alpha_h\}$, $\{\beta_h\}$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ verificano le proprietà

i) $\alpha_h < \beta_h < \alpha_{h+1} < \beta_{+1}$;

ii) $\beta_h/\alpha_h \longrightarrow +\infty$;

iii) $\alpha_{h+1}/\beta_h \longrightarrow +\infty$;

iv) $(\alpha_h/\beta_h)\log(\alpha_{h+1}/\alpha_h) \longrightarrow 0+$, per $h \longrightarrow +\infty$.

Con lievi alterazioni nei punti angolosi $t = \alpha_h$, $t = \beta_h$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ si può fare in modo che sia garantita la derivabilità per ogni t. Le condizioni (c) e (d) sono verificate.

Dato che le alterazioni si possono ritenere trascurabili, noi continueremo a considerare $\psi(t)$ così come è stata definita sopra.

Poniamo

$$I_h = \int_{\alpha_h}^{\alpha_{h+1}} \frac{\psi(u)}{u^2}\, du, \qquad I_h(t) = \int_t^{\alpha_{h+1}} \frac{\psi(u)}{u^2}\, du.$$

Tenendo conto delle condizioni $i)$–$iv)$, si ha

$$I_h = \psi(\alpha_h) \,\{\, 1/\alpha_h + (\log(\alpha_{h+1}/\beta_h) - 1)/\beta_h \,\}$$

e, posto $\eta_h = (\alpha_h/\beta_h)\,\{\log(\alpha_{h+1}/\beta_h) - 1\,\}$, risulta

$$(6.1) \qquad I_h = \{\, \psi(\alpha_h)/\alpha_h \,\}\,(1 + \eta_h), \qquad \eta_h \to 0 \text{ per } h \to \infty,$$

$$(6.2) \qquad I_h(t) = \begin{cases} \{\, \psi(\alpha_h)/\alpha_h \,\}\,(\alpha_h/t + \eta_h) & \text{per } \alpha_h < t \leqq \beta_h \\ \{\, \psi(\alpha_h)/\beta_h \,\}\,\log(\alpha_{h+1}/t) & \quad\text{»} \quad \beta_h < t \leqq \alpha_{h+1} \end{cases}$$

Ne segue

$$J(t) = I_h(t) + \sum_{r=h+1}^{\infty} I_r = I_h(t) + \sum_{r=h+1}^{\infty} \{\, \psi(\alpha_r)/\alpha_r \,\}\,(1 + \eta_r):$$

essendo $\psi(\alpha_{r+1})/\alpha_{r+1} = \{\,\psi(\alpha_r)/\alpha_r\,\} \cdot \alpha_r/\beta_r$, posto $\eta_h' = \operatorname*{Sup}_{r \geqq h+1} \eta_r$, si ottiene

$$J(t) = I_h(t) + \frac{\psi(\alpha_{h+1})}{\alpha_{h+1}}(1 + \eta_h') \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_h}{\beta_h}\right)^r$$

da cui, per $h \geqq h_0(\psi)$

$$(6.3) \qquad J(t) = I_h(t) + (1 + \eta_h'')\, \psi(\alpha_{h+1})/\alpha_{h+1} \qquad (\eta_h'' \to 0 \text{ per } h \to \infty).$$

Valutiamo il rapporto $\rho(t)$, distinguendo i due casi:

1) $\alpha_h < t \leqq \beta_h$. Per (6.1) e (6.3), si ha

$$\rho(t) = \frac{t}{\psi(t)} \left\{ \frac{\psi(\alpha_h)}{\alpha_h}\left(\frac{\alpha_h}{t} + \eta_h\right) + (1 + \eta_h'')\frac{\psi(\alpha_{h+1})}{\alpha_{h+1}} \right\}$$

$$= \frac{\psi(\alpha_h)}{\psi(t)} \left\{ 1 + \frac{t}{\beta_h}\left(\log\frac{\alpha_{h+1}}{\beta_h} - 1\right) \right\} + (1 + \eta_h'')\frac{\psi(\alpha_{h+1})}{\alpha_{h+1}} : \frac{\psi(t)}{t}$$

ed essendo $\psi(t) = \psi(\alpha_h) = \psi(\beta_h)$

$$\rho(t) = 1 + \frac{t}{\beta_h}\left\{\log\frac{\alpha_{h+1}}{\beta_h} - 1\right\} + \frac{t}{\beta_h}(1 + \eta_h'') = 1 + \frac{t}{\beta_h}\left\{\log\frac{\alpha_{h+1}}{\beta_h} + \eta_h''\right\}.$$

Per $t \to +\infty$ lungo gli intervalli $\alpha_h < t \leqq \beta_h$ risulta

$$\underline{\lim}\, \rho(t) = 1, \qquad \overline{\lim}\, \rho(t) = +\infty. \tag{6.4}$$

2) $\beta_h < t \leqq \alpha_{h+1}$. Risulta, per (6.2) e (6.3),

$$\rho(t) = \frac{t}{\psi(t)}\left\{\frac{\psi(\alpha_h)}{\beta_h}\log\frac{\alpha_{h+1}}{t} + (1 + \eta_h'')\frac{\psi(\alpha_{h+1})}{\alpha_{h+1}}\right\}$$

ed essendo $\psi(\alpha_h) = \psi(\beta_h)$:

$$\rho(t) = \log(\alpha_{h+1}/t) + 1 + \eta_h''.$$

Per $t \to \infty$ lungo questi intervalli $\beta_h < t \leqq \alpha_{h+1}$, risulta ancora valida (6.4).

Il teorema è così dimostrato.

Coppie di successioni $\{\alpha_h\}$, $\{\beta_h\}$ che verificano le proprietà *i)*-*iv)* sono, per esempio: $\alpha_h = h^h$, $\beta_h = h^h \log^2 h$; $\alpha_h = h^h$, $\beta_h = (h + 1)^{h+1}/\log^2 h$; $\alpha_h = h^h$, $\beta_h = (\alpha_h\alpha_{h+1})^{1/2} = h^{h/2}(h+1)^{(h+1)/2}$.

7. Dimostrazione del Teorema V.

Per le proprietà (β) e (γ) delle funzioni « lentamente oscillanti » riportate nel n. 4, risulta

$$\Psi(n) \sim \{\psi(n)\psi(n+1)\}^{1/2}.$$

Basta ora provare che $\psi(n+1) \asymp \psi(n)$: anzi, risulterà $\psi(n+1) \sim \psi(n)$.

Ricordando la (β), si ha:

$$(n+1)\psi(n+1) \sim \int_1^{n+1} \psi(t)dt \sim \sum_{k=1}^{n+1} \psi(k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \psi(k) + \psi(n+1) \sim \int_1^{n} \psi(t)dt + \psi(n+1)$$

da cui segue

$$n\psi(n+1) \sim \int_1^{n} \psi(t)dt:$$

da questa e dalla (α) si deduce che $\psi(n+1) \sim \psi(n)$. Si conclude che $\Psi(n) \sim \psi(n)$, e il teorema è dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. EGERVARY, *Ueber gewisse Extremumprobleme der Funktionentheorie*, «Math. Ann.», *99* (1928), 542-561.

[2] L. FEJER, *Ueber gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze*, «Sitzungsb. d. math.-phys. Kl. d. Akad. Wiss. München», 1910, 3 Abh., 17 pp.

[3] G. H. HARDY - J. E. LITTLEWOOD, *Some new properties of Fourier constants*, «Math. Ann.», *97* (1927), 159-208.

[4] G. H. HARDY - J. E. LITTLEWOOD, *Tauberian theorems concerning power series whose coefficients are positive*, «Proc. London Math. Soc.» (2), *13* (1914), 174-191.

[5] G. H. HARDY - W. W. ROGOSINSKI, *Notes on Fourier series* (III): *Asymptotic formulae for the sums of certain trigonometrical series*, «Quart. J. of Math.», Oxford, *16* (1945) 49-58.

[6] E. LANDAU, *Darstellung und Begrundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin (1929).

[7] G. RICCI, *Sull'andamento delle funzioni maggioranti delle serie di potenze*, «Ann. Matem. pura ed appl.», (4) *40* (1955), 285-306.

[8] O. SZASZ, *Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes ueber Potenzreihen*, «J. London Math. Soc.», *3* (1928), 254-262.

[9] E. C. TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, [illegible] ed., London (1960).

[10] P. TURAN, *On a point in the theory of power series* (in ungherese), «Matem. Lapok», *10* (1959), 278-283.