S. Guerra

Qualche osservazione sulla nota disuguaglianza di W. A. Markoff.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.4, p. 398–404.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_4_398_0>

Qualche osservazione sulla nota disuguaglianza di W. A. Markoff

Nota di S. GUERRA (a Pisa) (*) [1]

Sunto. - *È ben nota la seguente disuguaglianza di* W. A. MARKOFF

Se $P_n(x)$ *è un polinomio algebrico, di grado* n, *a coefficienti reali ed è*

$$|P_n(x)| \leq L, \qquad 0 \leq x \leq 1, \text{ [2]}$$

per la sua p^{esima} *derivata vale la disuguaglianza*

$$|P_n^{(p)}(x)| \leq \frac{n^2[n^2-1^2]\dots[n^2-(p-1)^2]}{(2p-1)!!} \cdot 2^p \quad L, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

e tale massimo è raggiunto se, e soltanto se

$$P_n(x) = \pm L \cos [n \arccos (2x-1)] \text{ [3]}.$$

Dal testo di questo teorema risulta, ovviamente, che la disuguaglianza non può migliorarsi, valendo il segno $=$ *quando* $P_n(x)$ *è della forma detta.*

Ci si può tuttavia proporre di ricercare qualche classe di polinomi, a coefficienti reali, per i quali la disuguaglianza in discorso possa migliorarsi. Poichè non mi risulta che questa questione sia stata trattata, con questa nota indico appunto una di tali classi (Osserv. corollario del teorema II) e segnalo anche un caso particolarmente notevole nel quale valgono disuguaglianze del tipo

$$|P_n^{(p)}(x)| \leq |P_n^{(p-1)}(x)| \leq \dots \leq |P_n'(x)| \leq |P_n(x)|$$

(coroll. del teorema III)

1. I polinomi $R_n(x)$

Indichiamo con $\{R\}$ il sistema dei polinomi

$$(1) \qquad R_0(x), \qquad R_1(x), \dots, R_n(x), \dots$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I. il 10 settembre 1963

[1] Indirizzo dell'autore: Istituto Matematico dell'Università di Pisa.

[2] Ci riferiamo qui e nel seguito, per semplicità, all'intervallo $0 \leq x \leq 1$ potendoci sempre a questo ricondurre con una opportuna sostituzione lineare.

[3] W. A. MARKOFF, *Sur les fonctions qui s'ecartent le moins de zero* (1892, St. Petersbourg). Per la trad. tedesca: «Math. Ann.», 77 (1915) pp. 213-258.

definiti induttivamente con le posizioni

$$R_0(x) = c(0), \qquad R_n(x) = \int_0^x R_{n-1}(x)dx + c(n)$$

nelle quali $c(n)$ rappresenta una funzione dell'intero, non negativo, n.

L'$n+1^{\text{esimo}}$ elemento di $\{R\}$ ha l'espressione esplicita

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c(k) \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$$

Per ogni intero positivo $p \leq n$ risulta

$$R_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{n-p} c(k) \frac{x^{n-p-k}}{(n-p-k)!}$$

cioè i polinomi (1) godono della proprietà espressa dalla formula

$$R_n^{(p)}(x) = R_{n-p}(x). \tag{2}$$

Osservazione I. - Se $c(0) \neq 0$, ogni polinomio

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

di grado n in x, si può, in uno ed in un sol modo, rappresentare nella forma

$$\lambda_0 R_0(x) + \lambda_1 R_1(x) + \ldots + \lambda_n R_n(x),$$

la determinazione delle costanti λ_i essendo ricondotta alla risoluzione del sistema

$$\left\{\begin{array}{rl} c(0)\lambda_0 + c(1)\lambda_1 + c(2)\lambda_2 + \ldots + c(n)\lambda_n &= a_0 \\ c(0)\lambda_1 + c(1)\lambda_2 + \ldots + c(n-1)\lambda_n &= a_1 \\ c(0)\lambda_2 + \ldots + c(n-2)\lambda_n &= 2!\, a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c(0)\lambda_n &= n!\, a_n \end{array}\right. \tag{3}$$

il cui determinante vale

$$[c(0)]^{n+1}.$$

Osservazione II. - Se $c(i) > 0$ gli elementi di $\{R\}$ sono funzioni positive crescenti della variabile x su ogni intervallo tutto costituito di numeri non negativi.

Osservazione III. - Se $c(0) > 0$ e $c(i)$ è funzione non decrescente di i gli elementi di $\{R\}$ sono funzioni crescenti di i per ogni x positivo.

Vale infatti l'identità

$$(4) \qquad R_{i-1}(x) = R_i(x) - c(0)\frac{x^i}{i!} - \sum_{k=0}^{i-1}[c(k+1) - c(k)]\frac{x^{i-1-k}}{(i-1-k)!}.$$

2. Alcuni teoremi relativi a polinomi algebrici.

Sia

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

un polinomio in x di grado n e sia

$$|P_n(x)| \leq L, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Consideriamo il sistema $\{R\}$ dei polinomi (1) e supponiamo, ora e nel seguito, anche se ciò non sarà esplicitamente detto, che sia $c(0) > 0$ e $c(i)$ funzione non decrescente di i.

Teorema I. - Vale la disugualianza

$$(5) \qquad |P'_n(x)| \leq L + M_c R_n(x), \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

essendo M_c il massimo modulo delle quantità λ_i, dipendenti dalla funzione c, definite implicitamente dal sistema (3).

Il polinomio $P_n(x)$, (osser. I), può scriversi nella forma

$$P_n(x) = \lambda_0 R_0(x) + \lambda_1 R_1(x) + \dots + \lambda_n R_n(x).$$

Derivando ambo i membri di questa uguaglianza rispetto ad x, per la (2), si ha

$$P'_n(x) = \lambda_1 R_0(x) + \lambda_2 R_1(x) + \dots + \lambda_n R_{n-1}(x)$$

ovvero, aggiungendo e sottraendo a 2° membro la quantità $\lambda_0 R_0(x) = \lambda_0 c(0)$ e tenendo conto della (4),

$$P'_n(x) = P_n(x) - c(0)\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{x^k}{k!} - \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_{m+1} \left\{ \sum_{k=0}^{m} [c(k+1) - c(k)] \frac{x^{m-k}}{(m-k)!} \right\}$$

da cui

$$P'_n(x) \leq L + M_c\left(c(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ \sum_{k=0}^{m} [c(k+1) - c(k)] \frac{x^{m-k}}{(m-k)!} \right\}\right) =$$

$$= L + M_c R_n(x).$$

Se particolarizziamo la funzione c ponendo $c(i) = 1$, per ogni i intero, si ha il:

Corollario. - Risulta

$$(6) \qquad | P'_n(x) | < L + Me, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

essendo M il massimo modulo delle quantità

$$(7) \qquad a_0 - a_1, \; a_1 - 2!\, a_2, \dots, (n-1)!\, a_{n-1} - n!\, a_n, \; n!\, a_n$$

ed e la base dei logaritmi naturali.

Basta osservare che, in queste condizioni, il sistema (3) fornisce per i λ, rispettivamente i valori indicati in (7) e che

$$R_n(x) < e, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Teorema II. - Vale la disuguaglianza

$$(8) \qquad | P_n^{(p)}(x) | \leq L + M_c[R_n(x) + R_{n-1}(x) + \dots + R_{n+1-p}(x)], \quad 0 \leq x \leq 1$$

essendo M_c la quantità definita nel teorema precedente.

Per la (5) risulta

$$|P'_n(x)| \leq L + M_c R_n(x).$$

Se scriviamo $P'_n(x)$ nella forma

$$P'_n(x) = \lambda_0^{(1)} R_0(x) + \lambda_1^{(1)} R_1(x) + \dots + \lambda_{n-1}^{(1)} R_{n-1}(x),$$

si osserva che le $\lambda_i^{(1)}$, essendo fornite dal sistema

$$\begin{cases} c(0)\lambda_0^{(1)} + c(1)\lambda_1^{(1)} + c(2)\lambda_2^{(1)} + \dots + c(n-1)\lambda_{n-1}^{(1)} = a_1 \\ \qquad c(0)\lambda_1^{(1)} + c(1)\lambda_2^{(1)} + \dots + c(n-2)\lambda_{n-1}^{(1)} = 2!\, a_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad c(0)\lambda_{n-1}^{(1)} = n!\, a_n, \end{cases}$$

coincidono ordinatamente con le ultime n quantità λ_i che figurano nel sistema (3).

Pertanto, sempre per la (5), e per la non crescenza di M_c al crescere di p,

$$|P''_n(x)| \leq [L + M_c R_n(x)] + M_c R_{n-1}(x) = L + M_c[R_n(x) + R_{n-1}(x)].$$

Così proseguendo si ha analogamente

$$|P'''_n(x)| \leq \{L + M_c[R_n(x) + R_{n-1}(x)]\} + M_c R_{n-2}(x) =$$

$$= L + M_c[R_n(x) + R_{n-1}(x) + R_{n-2}(x)]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|P_n^{(p)}(x)| \leq \{L + M_c[R_n(x) + R_{n-1}(x) + \dots + R_{n+2-p}(x)]\} + M_c R_{n+1-p}(x) =$$

$$= L + M_c[R_n(x) + R_{n-1}(x) + \dots + R_{n+1-p}(x)].$$

Particolarizzando, come prima, la funzione c col porre $c(i) = 1$ per ogni i intero, si ha il:

Corollario. - Risulta

$$|P_n^{(p)}(x)| < L + pMe, \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{9}$$

essendo M il massimo modulo delle quantità (7) ed e la base dei logaritmi naturali.

Basta ripetere l'osservazione fatta a prova del precedente corollario.

Osservazione. - Se il polinomio $P_n(x)$ è tale che per esso risulta

$$M \leq \left\{ \frac{n^2[n^2 - 1^2] \dots [n^2 - (p-1)^2] \cdot 2^p}{(2p-1)!!} - 1 \right\} \cdot \frac{L}{pe},$$

allora la (9) migliora la disuguaglianza di W. A. Markoff.

Si consideri, ad esempio, il polinomio

$$P_3(x) = 1 + 5x - 2x^2 + x^3.$$

Risulta, per $0 \leq x \leq 1$,

$$|P_3(x)| \leq 5.$$

Per le sue derivate la disuguaglianza di W. A. Markoff ci dà, sullo stesso intervallo

$$|P_3'(x)| \leq 90, \qquad |P_3''(x)| \leq 480, \qquad |P_3'''(x)| \leq 960.$$

Per la (9), essendo $M = 10$, risulta invece

$$|P_3'(x)| < 5 + 10e < 35, \quad |P_3''(x)| < 5 + 20e < 65, \quad |P_3'''(x)| < 5 + 30e < 95.$$

Vale infine osservare la proposizione seguente:

Teorema III. - Se tra le $n+1$ quantità λ_i che figurano nel sistema (3), quelle diverse da zero, sono tutte dello stesso segno, allora

$$(10)\qquad |P_n^{(p)}(x)| \leq |P_n^{(p-1)}(x)| \leq \dots \leq |P_n'(x)| \leq |P_n(x)|, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Scritto, al solito, $P_n(x)$ nella forma

$$P_n(x) = \lambda_0 R_0(x) + \lambda_1 R_1(x) + \dots + \lambda_n R_n(x),$$

se le λ_i non nulle sono dello stesso, segno, si ha

$$\begin{aligned} |P_n(x)| &= |\lambda_0| R_0(x) + |\lambda_1| R_1(x) + \dots + |\lambda_n| R_n(x) \\ |P_n'(x)| &= |\lambda_0| R_0'(x) + |\lambda_1| R_1'(x) + \dots + |\lambda_n| R_n'(x) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |P_n^{(p)}(x)| &= |\lambda_0| R_0^{(p)}(x) + |\lambda_1| R_1^{(p)}(x) + \dots + |\lambda_n| R_n^{(p)}(x). \end{aligned}$$

Ma allora (osserv. III) essendo, per ogni n e per $0 \leq x \leq 1$,

$$R_{n-p}(x) \leq R_{n-p+1}(x) \leq \dots \leq R_n(x)$$

e quindi, per la (2),

$$R_n^{(p)}(x) \leq R_n^{(p-1)}(x) \leq \dots \leq R_n(x),$$

risulta

$$|P_n^{(p)}(x)| \leq |P_n^{(p-1)}(x)| \leq \dots \leq |P_n'(x)| \leq |P_n(x)|.$$

Corollario. - Se tra i numeri

$$(11)\qquad a_0 - a_1,\ a_1 - 2a_2,\ a_2 - 3a_3, \dots,\ a_{n-1} - na_n,\ a_n$$

quelli non nulli sono dello stesso segno, allora

$$|P_n^{(p)}(x)| \leq |P_n^{(p-1)}(x)| \leq \dots \leq |P_n'(x)| \leq |P_n(x)|, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Segue subito assumendo, al solito, $c(i) = 1$ per ogni intero i e osservando che, in tal caso, le quantità λ_i si riducono alle (7) e che queste ultime sono o no dello stesso segno allora e solo che siano dello stesso segno i numeri (11).