Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Guglielmino

Su alcuni spazi di interpolazione.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **18** (1963), n.4, p. 339–350.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1963_3_18_4_339_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1963.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Su alcuni spazi di interpolazione

Nota di FRANCESCO GUGLIELMINO (a Catania) (*) (**)

Sunto. - *Utilizzando il metodo degli spazi di tracce, si studia il problema dell'interpolazione fra due spazi del tipo* $L^{p_1 p_2}(Q)$ *(cfr. il n. 1).*

Résumé. - *En utilisant la méthode des espaces de traces, on étudie le problème de l'interpolation entre deux espaces du type* $L^{p_1 p_2}(Q)$ *(cf. le N°. 1).*

1. Sia Q un insieme misurabile dello spazio euclideo R^{m+n} prodotto cartesiano degli spazi R^m e R^n di punti generici x e y rispettivamente. Fissato y in R^n, indichiamo con $\Omega(y)$ l'insieme, eventualmente vuoto, dei punti x di R^m tali che (x, y) appartenga a Q; indichiamo, inoltre, con Y l'insieme dei punti y di R^n nei quali la misura m-dimensionale di $\Omega(y)$ è maggiore di zero. Denotiamo, poi, con $L^{p_1 p_2}(Q)$ $(1 \leq p_1, p_2 \leq \infty)$ lo spazio lineare delle (classi di) funzioni $f(x, y)$ (1) misurabili in Q per le quali risulta finita la quantità

$$\| f \|_{p_1 p_2} = \left[\int_Y \left(\int_{\Omega(y)} | f(x, y) |^{p_1} dx \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right]^{\frac{1}{p_2}}$$

(*) Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I. il 15 maggio 1963.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 13 del C. N. R. per il 1962-63.

(1) Facciamo, cioè, la convenzione che due funzioni dello spazio quasi ovunque eguali in Q si considerino come un unico elemento dello spazio. Avvertiamo, inoltre, che tutte le questioni che formano oggetto della presente Nota possono essere trattate indifferentemente nel campo reale o nel campo complesso.

(con le solite modifiche se p_1, p_2 od entrambi sono infiniti); $\|f\|_{p_1 p_2}$ è una norma in $L^{p_1 p_2}(Q)$ che con questa norma è uno spazio di BANACH ([2]). Spazi di questo tipo intervengono nello studio dei problemi al contorno per operatori parabolici ed è appunto una ricerca in tale campo (cfr. [2]) che ci ha indotto a pubblicare il presente lavoro.

Richiamata nel n. 2 la costruzione degli spazi di tracce ([3]), stabiliamo nei nn. 3 e 4 due teoremi che permettono di confrontare lo spazio di tracce costruito a partire da $L^{p_1 p_2}(Q)$ e $L^{q_1 q_2}(Q)$ con lo spazio $L^{r_1 r_2}(Q)$ dove

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1-\theta}{p_i} + \frac{\theta}{q_i} \cdot \qquad (i = 1, 2;\ 0 < \theta < 1). \tag{1}$$

In particolare, per $p_1 = p_2$ e $q_1 = q_2$ i teoremi qui stabiliti restituiscono due risultati di J. L. LIONS ([4], pp. 155 e 157). Dai teoremi dei nn. 3 e 4 si deduce un teorema di interpolazione che generalizza quello di M. RIESZ ([6], pag. 481) e viene esplicitamente enunciato nel n. 5.

2. Se X è uno spazio di BANACH, si suole denotare con $L^p(0, b; X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ lo spazio lineare delle (classi di) funzioni $u(t)$ misurabili nell'intervallo $(0, b)$, a valori in X, per le quali risulta finita la quantità

$$\left(\int_0^b (\| u(t) \|_X)^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

con la solita modifica se $p = \infty$; la (2) è una norma in $L^p(0, b; X)$ che con questa norma è uno spazio di BANACH.

([2]) Se $Q = R^{m+n}$, la completezza di $L^{p_1 p_2}$ segue immediatamente dalla completezza dello spazio delle funzioni di potenza p_2-esima sommabile in R^n, a valori in uno spazio di BANACH (nel caso in esame: $L^{p_1}(R^m)$). Se $Q \neq R^{m+n}$, basta prolungare le funzioni di $L^{p_1 p_2}(Q)$ in R^{m+n} ponendole eguali a zero nei punti di $R^{m+n} - Q$.

([3]) Vedi ad es.: [4] pp. 147-151 oppure [5] pp. 3-5.

Siano, poi, A uno spazio lineare topologico e A_0 e A_1 due spazi di BANACH contenuti in A, le due inclusioni essendo continue. Indichiamo con $W(p, q, \theta; A_0, A_1)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, lo spazio delle (classi di) funzioni $u(t)$ tali che

$$t^{\alpha} u(t) \in L^p(0, +\infty; A_0), \quad t^{\beta} u'(t) \in L^q(0, +\infty; A_1) \text{ (}^4\text{)},$$

dove $\alpha = \theta - \dfrac{1}{p}$ e $\beta = \theta - \dfrac{1}{q}$. Se poniamo:

$$X_{p,\alpha}(u) = \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha p} (\| u(t) \|_{A_0})^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad Y_{q,\beta}(u) = \left(\int_0^{+\infty} t^{\beta q} (\| u'(t) \|_{A_1})^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\| u \|_W = \max (X_{p,\alpha}(u), \; Y_{q,\beta}(u)),$$

$W(p, q, \theta; A_0, A_1)$ risulta uno spazio di BANACH. Considerato, allora, lo spazio di BANACH $A_0 + A_1$ (5) munito della norma

$$\| a \|_{A_0 + A_1} = \inf_{a_0, a_1} (\| a_0 \|_{A_0} + \| a_1 \|_{A_1}) \qquad (a = a_0 + a_1),$$

dalle ipotesi fatte si deduce facilmente (6) che, comunque si fissi il numero positivo (finito) T, se $u \in W(p, q, \theta; A_0, A_1)$, si ha:

$$u \in L^1(0, T; A_0 + A_1) \quad u' \in L^1(0; T; A_0 + A_1).$$

Ne segue che u è quasi ovunque eguale ad una funzione continua in $[0, +\infty)$, a valori in $A_0 + A_1$ e, quindi, $u(0)$ ha senso purchè

(4) $u'(t)$ è una derivata nel senso delle distribuzioni su $(0, +\infty)$ a valori in A, vedi: [8]. pag. 68.

(5) $A_0 + A_1$ è l'insieme degli elementi $a \in A$ tali che $a = a_0 + a_1$ con $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$.

(6) Per maggiori dettagli vedi: [4], pag. 149.

si identifichi u con questa funzione continua. Al variare di u in $W(p, q, \theta;\ A_0, A_1)$, $u(0)$ descrive uno spazio $T(p, q, \theta;\ A_0, A_1)$ che si può normalizzare ponendo:

$$\| a \|_T = \inf_u \| u \|_W \qquad (u(0) = a)$$

e risulta uno spazio di BANACH (7).

In particolare, se $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$, è lecito nella costruzione di $T(p, q, \theta;\ A_0, A_1)$ porre: $A_0 = L^{p_1 p_2}(Q)$ e $A_1 = L^{q_1 q_2}(Q)$. In tal caso, si potrà assumere come A lo spazio delle (classi di) funzioni $f(x, y)$ misurabili in Q e sommabili in ogni sottoinsieme misurabile e limitato di Q; questo spazio è lineare e in esso si può introdurre una struttura di spazio topologico mediante la topologia definita dalla famiglia separata di seminorme descritta da

$$\int_I | f(x, y) | \, dx dy$$

al variare di I nella famiglia dei sottoinsiemi misurabili e limitati di Q.

3. Proveremo, ora, il seguente

TEOREMA I. - *Se* $1 \leq p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \leq \infty$, $p \leq \min(p_1, p_2)$, $q \leq \min(q_1, q_2)$, $0 < \theta < 1$, *allora*:

$$T(p, q, \theta;\ L^{p_1 p_2}(Q),\ L^{q_1 q_2}(Q)) \subset L^{r_1 r_2}(Q)$$

algebricamente e topologicamente, r_1 *e* r_2 *essendo dati dalle* (1).

(7) [5], pag. 5.

Siano $f(x, y)$ una funzione di $T(p, q, \theta; L^{p_1 p_2}(Q), L^{q_1 q_2}(Q))$ e $u(x, y, t)$ una qualunque funzione di $W(p, q, \theta; L^{p_1 p_2}(Q), L^{q_1 q_2}(Q))$ tale che $u(x, y, 0) = f(x, y)$ (cfr. il n. 2). Posto $\alpha = \theta - \frac{1}{p}$, essendo finito $X_{p,\alpha}(u)$ cioè

$$\left[\int_0^{+\infty} t^{\alpha p}\left(\int_Y\left(\int_{\Omega(y)} |u(x, y, t)|^{p_1} dx\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dy\right)^{\frac{p}{p_2}} dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

per la disuguaglianza di JESSEN [8] è anche finita la quantità

$$\left[\int_Y\left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha p}\left(\int_{\Omega(y)} |u(x, y, t)|^{p_1} dx\right)^{\frac{p}{p_1}} dt\right)^{\frac{p_2}{p}} dy\right]^{\frac{1}{p_2}}$$

e, quindi, per quasi tutti gli y di Y si ha:

$$\left[\int_0^{+\infty} t^{\alpha p}\left(\int_{\Omega(y)} |u(x, y, t)|^{p_1} dx\right)^{\frac{p}{p_1}} dt\right]^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{3}$$

Analogamente, posto $\beta = \theta - \frac{1}{q}$, risulta:

$$\left[\int_0^{+\infty} t^{\beta q}\left(\int_{\Omega(y)}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{q_1} dx\right)^{\frac{q}{q_1}} dt\right]^{\frac{1}{q}} < +\infty \tag{4}$$

(8) Cfr. ad es.: [3], pag. 150, n. 203; [1], pag. 22, formula (6). La disuguaglianza di JESSEN è la seguente:

$$\left[\int_R\left(\int_S |F(r, s)|^p ds\right)^{\frac{q}{p}} dr\right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[\int_S\left(\int_R |F(r, s)|^q dr\right)^{\frac{p}{q}} ds\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (0 < p \leq q \leq \infty).$$

quasi ovunque in Y. Dalle (3) e (4) segue che $f(x, y)$ appartiene a $T(y) = T(p, q, \theta; L^{p_1}(\Omega(y)), L^{q_1}(\Omega(y)))$ per quasi tutti gli y di Y e, allora, per un risultato di J. L. LIONS ([4], pag. 155), per tali valori di y, $f(x, y)$ appartiene a $L^{r_1}(\Omega(y))$; inoltre, si ha:

$$\left(\int_{\Omega(y)} |f(x, y)|^{r_1} dx\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq c(p, q, \theta) \| f \|_{T(y)} \quad (9)$$

da cui ([4], pag. 151)

$$\left(\int_{\Omega(y)} |f(x, y)|^{r_1} dx\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq c \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \left(\int_{\Omega(y)} |u(x, y, t)|^{p_1} dx\right)^{\frac{p}{p_1}} dt\right)^{\frac{1-\theta}{p}}$$

$$\cdot \left(\int_0^{+\infty} t^{\beta q} \left(\int_{\Omega(y)} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{q_1} dx\right)^{\frac{q}{q_1}} dt\right)^{\frac{\theta}{q}},$$

$$\left(\int_Y \left(\int_{\Omega(y)} |f(x, y)|^{r_1} dx\right)^{\frac{r_2}{r_1}} dy\right)^{\frac{1}{r_2}}$$

(5)

$$\leq c \left[\int_Y \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \left(\int_{\Omega(y)} |u|^{p_1} dx\right)^{\frac{p}{p_1}} dt\right)^{\frac{(1-\theta) r_2}{p}} \left(\int_0^{+\infty} t^{\beta q} \left(\int_{\Omega(y)} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{q_1} dx\right)^{\frac{q}{q_1}} dt\right)^{\frac{\theta r_2}{q}} dy\right]^{\frac{1}{r_2}}.$$

Poniamo, poi: $p' = \frac{p_2}{(1-\theta) r_2}$, $q' = \frac{q_2}{\theta r_2}$ se $r_2 < \infty$; in virtù della (1) risulta: $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ e, applicando la disuguaglianza di HÖLDER nel secondo membro della (5), otteniamo:

(9) $c(p, q, \theta)$ è una costante che dipende soltanto da p, q, θ; nel seguito la denoteremo semplicemente con c.

$$\| f \|_{r_1 r_2} \leq c \left[\int_Y \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \left(\int_{\Omega(y)} | u |^{p_1} dx \right)^{\frac{p}{p_1}} dt \right)^{\frac{p_2}{p}} dy \right]^{\frac{1-\theta}{p_2}}$$

$$\cdot \left[\int_Y \left(\int_0^{+\infty} t^{\beta q} \left(\int_{\Omega(y)} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{q_1} dx \right)^{\frac{q}{q_1}} dt \right)^{\frac{q_2}{q}} dy \right]^{\frac{\theta}{q_2}}$$

La relazione precedente è valida anche se $r_2 = \infty$ e, per quanto osservato all'inizio della dimostrazione, si può scrivere:

$$\| f \|_{r_1 r_2} \leq c \left[X_{p,\alpha}(u) \right]^{1-\theta} \left[Y_{q,\beta}(u) \right]^{\theta}$$

Per un lemma di J. L. Lions ([4], pag. 151):

$$(6) \qquad \| f \|_{r_1 r_2} \leq c \ \| f \|_T \qquad (T = T(p, q, \theta; L^{p_1 p_2}(Q), L^{q_1 q_2}(Q)))$$

e il teorema è dimostrato.

4. Il senso della relazione d'inclusione tra lo spazio $L^{r_1 r_2}(Q)$ e $T(p, q, \theta; L^{p_1 p_2}(Q), L^{q_1 q_2}(Q))$ può essere cambiato se per p e q si fanno ipotesi differenti da quelle del teorema I; sussiste, infatti, il

Teorema II. - *Se* $1 \leq p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \leq \infty$, $p \geq \max(p_1, p_2)$, $q \geq \max(q_1, q_2)$, $0 < \theta < 1$, *allora:*

$$T(p, q, \theta; L^{p_1 p_2}(Q), L^{q_1 q_2}(Q)) \supset L^{r_1 r_2}(Q)$$

algebricamente e topologicamente, r_1 *e* r_2 *essendo dati dalle* (1).

Allo scopo di dimostrare il teorema II, indicati con α e β i numeri $\theta - \frac{1}{p}$ e $\theta - \frac{1}{q}$ rispettivamente, scegliamo una funzione reale $v(t)$ misurabile in $(0, +\infty)$ e soddisfacente, inoltre, le condizioni:

$$t^{\alpha}v(t) \in L^{p}(0, +\infty), \qquad t^{\beta}v'(t) \in L^{q}(0, +\infty), \qquad v(0) = 1 \cdot [10].$$

Poniamo, poi: $\lambda = \frac{1}{\theta} - \frac{r_1}{p_1\theta}$ se $r_1 < \infty$, $\lambda = 0$ se $r_1 = \infty$, $\mu = \frac{r_1}{p_1\theta} - \frac{r_2}{p_2\theta}$ se $r_1 < \infty$, e $r_2 < \infty$, $\mu = \frac{1}{\theta} - \frac{r_2}{p_2\theta}$ se $r_1 = \infty$ e $r_2 < \infty$, $\mu = \frac{r_1}{p_1\theta} - \frac{1}{\theta}$ se $r_1 < \infty$ e $r_2 = \infty$, $\mu = 0$ se $r_1 = r_2 = \infty$.

Siano, ora, $f(x, y)$ una funzione di $L^{r_1 r_2}(Q)$ e $g(x, y)$ e $u(x, y, t)$ le funzioni definite dalle relazioni:

$$g(x, y) = | f(x, y) |^{\lambda} \Big(\int_{\Omega(y)} | f(x, y) |^{r_1} dx \Big)^{\frac{\mu}{r_1}} \qquad ((x, y) \in Q),$$

$$u(x, y, t) = f(x, y) \quad v(tg(x, y)) \qquad ((x, y) \in Q, \ t > 0).$$

L' appartenenza di $f(x, y)$ a $T(p, q, \theta; L^{p_1 p_2}(Q), L^{q_1 q_2}(Q))$ sarà assicurata se proveremo che $u(x, y, t)$ appartiene allo spazio $W(p, q, \theta; L^{p_1 p_2}(Q), L^{q_1 q_2}(Q))$. Osserviamo, quindi, che, essendo

$$X_{p, \alpha}(u) = \Big[\int_0^{+\infty} \Big(\int_Y \Big(\int_{\Omega(y)} t^{\alpha p_1} | u |^{p_1} dx \Big)^{\frac{p_2}{p_1}} dy \Big)^{\frac{p}{p_2}} dt \Big]^{\frac{1}{p}},$$

applicando due volte la disuguaglianza di JESSEN [8], si ottiene:

$$X_{p, \alpha}(u) \leq \Big[\int_Y \Big(\int_{\Omega(y)} \Big(\int_0^{+\infty} t^{\alpha p} | u |^{p} dt \Big)^{\frac{p_1}{p}} dx \Big)^{\frac{p_2}{p_1}} dy \Big]^{\frac{1}{p_2}}. \tag{7}$$

[10] Sul significato da attribuire a $v'(t)$ e $v(0)$ cfr. il n. 2.

D'altra parte, fissato quasi ovunque (x, y) in Q, risulta:

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \mid u \mid^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \| t^\alpha v(t) \|_{L^p} \mid f \mid^{1-\lambda\theta} \left(\int_{\Omega(y)} \mid f \mid^{r_1} dx\right)^{-\frac{\mu\theta}{r_1}}$$

e, quindi, sostituendo nella (7) e tenendo conto della definizione di λ, si ha:

$$X_{p,\alpha}(u) \leq \| t^\alpha v(t) \|_{L^p} \left[\int_Y \left(\int_{\Omega(y)} \mid f \mid^{r_1} dx\right)^{p_2\left(\frac{1}{p_1} - \frac{\mu\theta}{r_1}\right)} dy\right]^{\frac{1}{p_2}}$$

se $r_1 < \infty$ e

$$X_{p,\alpha}(u) \leq \| t^\alpha v(t) \|_{L^p} \left[\int_Y \left(\sup_{\Omega(y)} \mid f \mid\right)^{p_2(1-\mu\theta)} dy\right]^{\frac{1}{p_2}}$$

se $r_1 = \infty$. In entrambi i casi, tenendo presente la definizione di μ, si ottiene:

$$X_{p,\alpha}(u) \leq \| t^\alpha v(t) \|_{L^p} (\| f \|_{r_1 r_2})^{\frac{r_2}{p_2}} \tag{8}$$

se $r_2 < \infty$ e

$$X_{p,\alpha}(u) \leq \| t^\alpha v(t) \|_{L^p} \| f \|_{r_1 r_2} \tag{9}$$

se $r_2 = \infty$. Con metodo analogo si stabiliscono le disuguaglianze:

$$Y_{q,\beta}(u) \leq \| t^\beta v'(t) \|_{L^q} (\| f \|_{r_1 r_2})^{\frac{r_2}{q_2}} \tag{10}$$

se $r_2 < \infty$ e

$$Y_{q,\beta}(u) \leq \| t^\beta v'(t) \|_{L^q} \| f \|_{r_1 r_2} \tag{11}$$

se $r_2=\infty$. Dalle (8), (9), (10), (11) si deduce che $u(x, y, t)$ appartiene a $W(p, q, \theta; L^{p_1 p_2}(Q), L^{q_1 q_2}(Q))$ e, inoltre, che ([4], pag. 151)

$$\text{(12)} \quad \| f \|_T \leq [X_{p,\alpha}(u)]^{1-\theta}[Y_{q,\beta}(u)]^{\theta} \leq \| t^{\alpha}v(t) \|_{L^p}^{1-\theta} \| t^{\beta}v'(t) \|_{L^p}^{\theta} \| f \|_{r_1 r_2}$$

$$(T = T(p, q, \theta; L^{p_1 p_2}(Q), L^{q_1 q_2}(Q))).$$

Osservazione. - Considerata la costante c che figura nella (6) (cfr. anche la nota (9)) e fissato comunque un numero positivo $\varepsilon < c$, nella dimostrazione del teorema II si può scegliere $v(t)$ in maniera che risulti:

$$1 \geq (c - \varepsilon) \| t^{\alpha}v(t) \|_{L^p}^{1-\theta} \| t^{\beta}v'(t) \|_{L^q}^{\theta} \text{ (}^{11}\text{)}.$$

Allora, dalla (12) si trae:

$$\| f \|_T \leq \frac{1}{c - \varepsilon} \| f \|_{r_1 r_2}$$

e per l'arbitrarietà di ε:

$$\text{(13)} \qquad \| f \|_T \leq \frac{1}{c} \| f \|_{r_1 r_2}$$

5. Riprendendo, ora, le ipotesi e le notazioni del n. 2, supponiamo che $A_0 \cap A_1$ sia denso sia in A_0 che in A_1. Siano, poi, B uno spazio lineare topologico e B_0 e B_1 due spazi di Banach contenuti in B, le due inclusioni essendo continue. Diciamo π una trasformazione lineare di $A_0 \cap A_1$ in $B_0 \cap B_1$ soddisfacente le condizioni:

$$\| \pi(a) \|_{B_0} \leq \omega_0 \| a \|_{A_0}, \qquad \| \pi(a) \|_{B_1} \leq \omega_1 \| a \|_{A_1} \qquad (a \in A_0 \cap A_1).$$

(11) Cfr. [4], pag. 155 e pag. 157.

Si dimostra ([12]) che la trasformazione π si può prolungare in modo unico in una trasformazione lineare e continua, che continueremo a chiamare π, di $A_0 + A_1$ in $B_0 + B_1$; inoltre, π è anche una trasformazione lineare e continua di A_0 in B_0 e di A_1 in B_1 nonchè una trasformazione lineare e continua di $T(p, q, \theta; A_0, A_1)$ in $T(p, q, \theta; B_0, B_1)$ la cui norma è maggiorata da $\omega_0^{1-\theta}\omega_1^{\theta}$.

Ciò premesso, osserviamo che, se $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$, $L^{p_1p_2}(Q) \cap L^{q_1q_2}(Q)$ contiene le restrizioni a Q delle funzioni di $\mathfrak{D}(R^{m+n})$ ([13]) e, quindi ([14]), è denso sia in $L^{p_1p_2}(Q)$ che in $L^{q_1q_2}(Q)$. Allora, dai teoremi I e II e dalle (6) e (13) si deduce il

TEOREMA III. - *Se* $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$ ([15]), $1 \leq p_3, p_4, q_3, q_4 \leq \infty$, $\max(p_1, p_2) \leq \min(p_3, p_4)$, $\max(q_1, q_2) \leq \min(q_3, q_4)$, Q *e* Q′ *sono sottoinsiemi misurabili di* R^{m+n} *e* π *è una trasformazione lineare di* $\mathrm{L}^{p_1p_2}(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{L}^{q_1q_2}(\mathrm{Q})$ *in* $\mathrm{L}^{p_3p_4}(\mathrm{Q}') \cap \mathrm{L}^{q_3q_4}(\mathrm{Q}')$ *soddisfacente le condizioni*:

$$\| \pi(f) \|_{p_3p_4} \leq \omega_0 \| f \|_{p_1p_2}, \qquad \| \pi(f) \|_{q_3q_4} \leq \omega_1 \| f \|_{q_1q_2}$$

$$(f \in L^{p_1p_2}(Q) \cap L^{q_1q_2}(Q)) \ ([16]),$$

la trasformazione π *si può prolungare in modo unico in una trasformazione lineare e continua di* $\mathrm{L}^{p_1p_2}(\mathrm{Q}) + L^{q_1q_2}(\mathrm{Q})$ *in* $\mathrm{L}^{p_3p_4}(\mathrm{Q}') + \mathrm{L}^{q_3q_4}(\mathrm{Q}')$; *inoltre, posto*

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1-\theta}{p_i} + \frac{\theta}{q_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4;\ 0 < \theta < 1),$$

([12]) [4], pp. 153-154. Per comodità del lettore osserviamo che, essendo $A_0 \cap A_1$ denso sia in A_0 che in A_1, π si può prolungare per continuità in $A_0 \cup A_1$. Se, poi $a \in A_0 + A_1$ e $a = a_0 + a_1 = a'_0 + a'_1$ con $a_0, a'_0 \in A_0$, $a_1, a'_1 \in A_1$, risulta: $a_0 - a'_0 = a'_1 - a_1$, $\pi(a_0) - \pi(a'_0) = \pi(a'_1) - \pi(a_1)$, $\pi(a_0) + \pi(a_1) = \pi(a'_0) + \pi(a'_1)$. Si può, quindi, porre: $\pi(a) = \pi(a_0) + \pi(a_1)$.

([13]) $\mathfrak{D}(R^{m+n})$ è lo spazio delle funzioni definite in R^{m+n}, ivi di classe C^∞ e a supporto compatto.

([14]) $\mathfrak{D}(R^{m+n})$ è denso in $L^{p_1p_2}(R^{m+n})$ come si può dimostrare con considerazioni analoghe a quelle svolte in [7], pp. 22-23.

([15]) Se l'insieme Q è limitato, questa ipotesi può essere modificata; la si può, per esempio, sostituire con le seguenti: $1 \leq q_1 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_2 < p_2 \leq \infty$.

([16]) Le norme a primo membro si riferiscono agli spazi $L^{p_3p_4}(Q')$ e $L^{q_3q_4}(Q')$.

π è anche una trasformazione lineare e continua di $L^{r_1 r_2}(Q)$ *in* $L^{r_3 r_4}(Q')$ *la cui norma è maggiorata da* $\omega_0^{1-\theta}\omega_1^{\theta}$.

OSSERVAZIONE. - *La tesi del teorema* III *rimane valida se, ferme restando le altre ipotesi, si suppone che* $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$ *e che* π *sia una trasformazione definita in* $L^{p_1 p_2}(Q) \bigcup L^{q_1 q_2}(Q)$ *la quale risulti lineare e continua da* $L^{p_1 p_2}(Q)$ *in* $L^{p_3 p_4}(Q')$ *e da* $L^{q_1 q_2}(Q)$ *in* $L^{q_3 q_4}(Q')$ *e soddisfi le relazioni*:

$$\| \pi(f) \|_{p_3 p_4} \leq \omega_0 \| f \|_{p_1 p_2} \qquad (f \in L^{p_1 p_2}(Q)),$$

$$\| \pi(f) \|_{q_3 q_4} \leq \omega_1 \| f \|_{q_1 q_2} \qquad (f \in L^{q_1 q_2}(Q)).$$

Infatti, nelle nuove ipotesi non è più necessario assicurare la densità di $L^{p_1 p_2}(Q) \bigcap L^{q_1 q_2}(Q)$ in $L^{p_1 p_2}(Q)$ e in $L^{q_1 q_2}(Q)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. F. BECKENBACH, R. BELLMAN, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin (1961).

[2] F. GUGLIELMINO, *Ulteriori contributi alla regolarizzazione delle soluzioni deboli dei problemi parabolici*, in corso di stampa su «Ricerche di Matematica», 12 (1963).

[3] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. POLYA, *Inequalities*, University Press, Cambridge (1952).

[4] J. L. LIONS, *Sur les espaces d'interpolation; dualité*, «Math. Scand.» 9 (1961), 147-177.

[5] J. L. LIONS, *Espaces d'interpolation - Espaces de moyenne*, Corso CIME 1961, 2° Ciclo.

[6] M. RIESZ, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires*, «Acta Math.», 49 (1926), 465-497.

[7] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, vol. II, Hermann, Paris, (1951).

[8] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions a valeurs vectorielles*, Nota I, «Annales Fourier», 7 (1957), 1-141.